

組合せとグラフの理論 (塩田)

— ネットワークフロー —

ネットワーク

- 連結な重み付き有向グラフ $N = (D, \Psi)$ を「ネットワーク」と呼ぶ。ここで $D = (V, A)$ は有向グラフであり、各弧 $a \in A$ に対して非負の重み $\Psi(a) \geq 0$ が設定されているとする。 $\Psi(a)$ を「 a の容量」と呼ぶ。
- 重み付きの入出次数を
$$\text{indeg}(\Psi, x) = (x \text{ に入る弧 } a \text{ についての } \Psi(a) \text{ の合計}),$$
$$\text{outdeg}(\Psi, x) = (x \text{ から出る弧 } a \text{ についての } \Psi(a) \text{ の合計})$$
と定める。
- $\text{indeg}(\Psi, v) = 0$ を満たす頂点 v を「入口」、 $\text{outdeg}(\Psi, w) = 0$ を満たす頂点 w を「出口」と呼ぶ。
- 以下、簡単のため入口は v ひとつ、出口は w ひとつであるとする。

フロー

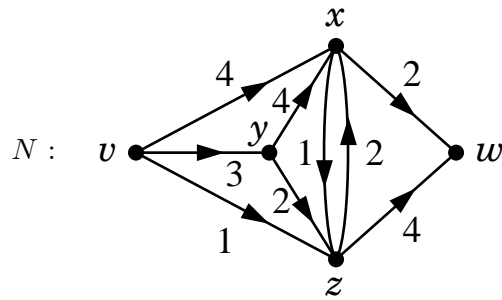
- D 上のもうひとつの重み φ が「 N のフロー」である、とは
 - (1) すべての弧 $a \in A$ について $0 \leq \varphi(a) \leq \Psi(a)$ が成り立ち、
 - (2) 入口 v , 出口 w 以外の全ての頂点 $x \in V$ について $\text{indeg}(\varphi, x) = \text{outdeg}(\varphi, x)$ が成り立つこと。
- フロー φ に対しては $\text{outdeg}(\varphi, v) = \text{indeg}(\varphi, w)$ が成り立ち、この値を「フロー φ の値」と呼ぶ。
- フローの値が最大となるフローを「最大フロー」と呼ぶ。

フローの意味

フローとは「流れ」のことで、例えば

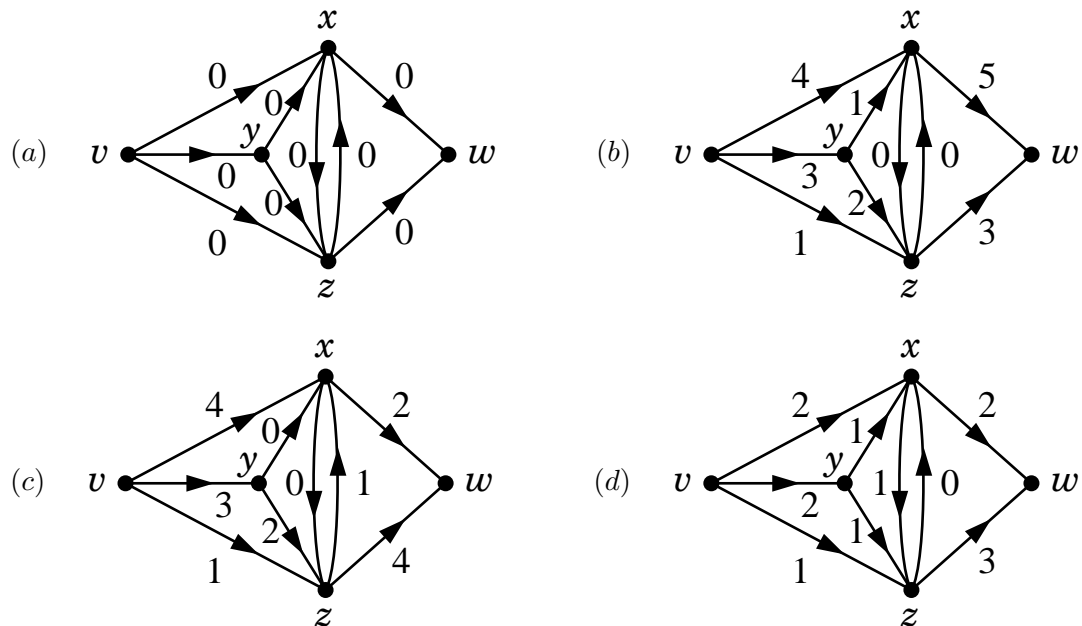
- コンピュータネットワークであれば、
 - (1) は回線の容量以内でデータが流れていること、
 - (2) は各中継点でデータの流入量と流出量が釣り合っていることを意味する。フローの値はサーバ v からクライアント w への通信速度であり、最大通信速度を達成している状態が最大フローになる。
- 川であれば、
 - (1) は堤防から溢れない範囲で水が流れていること、
 - (2) は、分岐点や合流点で、水の流入量と流出量が釣り合っていることを意味する。フローの値は河口 w から海へ流れ出る水量であり、洪水にならないギリギリで水が流れている状態が最大フローになる。

教科書の例



練習問題

次のうち、上記のネットワーク N のフローになっているものはどれか。



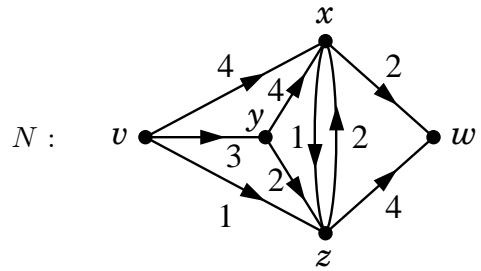
最大フローアルゴリズム

- 1° そこそこのフローをみつけて φ の初期値とする。
(計算機にやらせるときはゼロフローを初期値にする。)
- 2° 「残りの容量」を表すネットワーク $N' = (D, \Psi')$ を

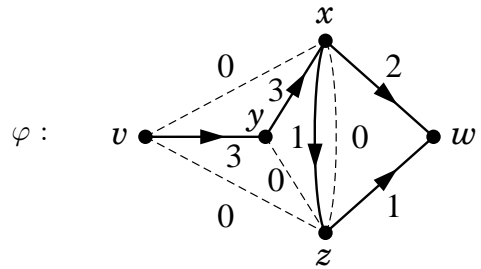
$$\begin{cases} \Psi'(a) = \Psi(a) - \varphi(a) \\ \Psi'(a^{-1}) = \varphi(a) \end{cases} \quad (a \in A)$$
 によって定める。ただし a^{-1} は a と逆方向の弧で、 a^{-1} が無いときは新たに作る。
- 3° N' の中で v を根とする幅優先探索を実行し v - w 道 P を探索する。
- 4° P が見つからなければ φ を出力し、終了する。
- 5° P 上の弧 a の、 N' における容量 $\Psi'(a)$ のうち最小の値を P 全体に与えて増加道 ε を作る。(ε はひとつのフローになる。)
- 6° 重みを足し合わせて (新 φ) = $\varphi + \varepsilon$ とし、2° へ戻る。

最大フローアルゴリズム実行例

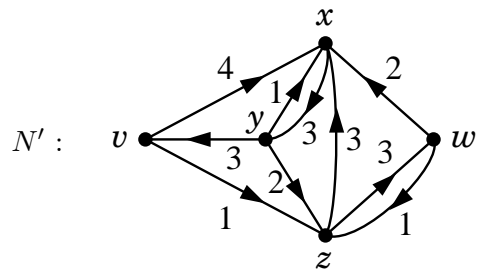
上の例で最大フローアルゴリズムを実行してみよう。



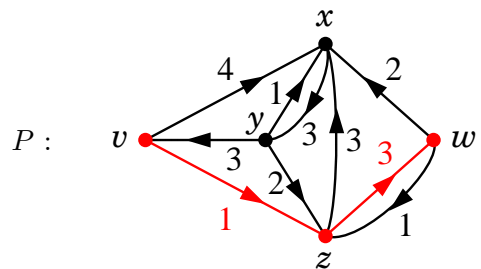
1° φ の初期値として右図のフローを与える。



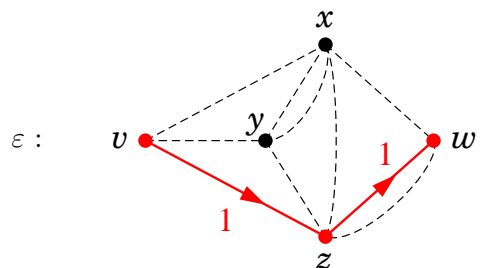
2° 残りの容量を表すネットワーク N' を求める。
(簡単のため容量 0 の弧は省略してある。)



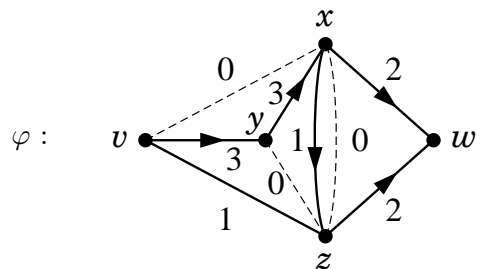
3° N' において v を根とする BFS を実行し v - w 道 P を求める。



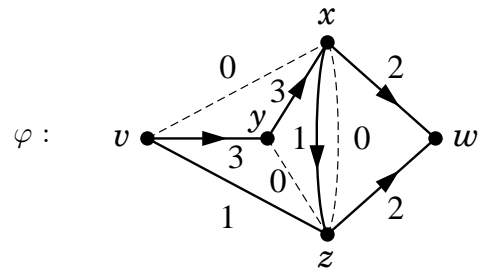
4° P の一番細い部分に合わせて増加道 ε を作る。



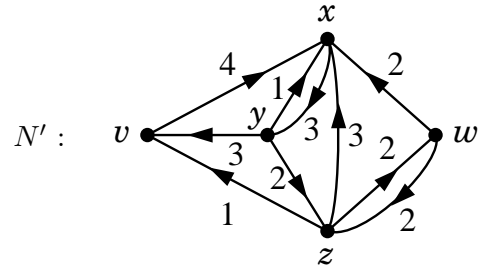
5° (新 φ) = $\varphi + \varepsilon$ とする。



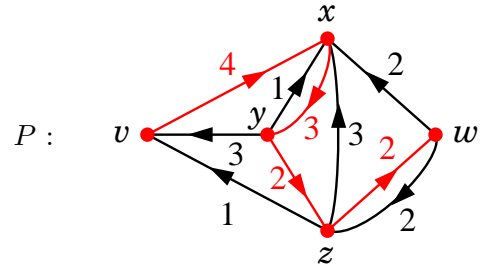
ページが変わったのでもう一度 φ を表示



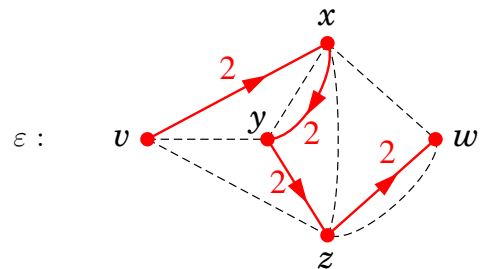
2° N' を求める。
($\Psi - \varphi$ で計算しても、 $\Psi' - \varepsilon$ で計算しても結果は同じになる。)



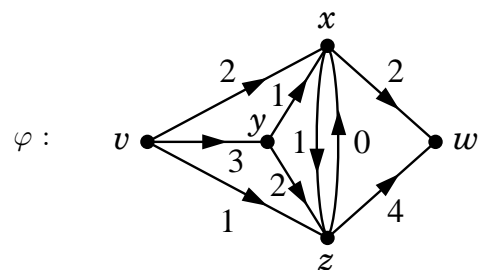
3° N' において v を根とする BFS を実行し $v-w$ 道 P を求める。



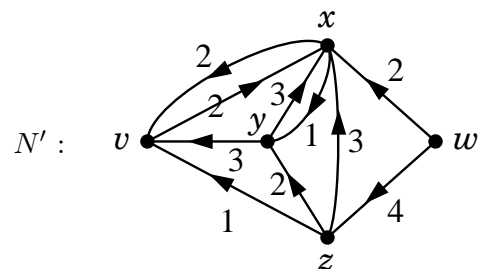
4° P の一番細い部分に合わせて増加道 ε を作る。



5° (新 φ) = $\varphi + \varepsilon$ とする。
ただし、 yx と xy は逆向きなので、重み 3 と 2 を相殺して yx の重みを 1 とする。



2° N' を求める。



3° N' には $v-w$ 道が無いのでここで終了する。