

組合せとグラフの理論 (塩田)

— 最大フロー・最小カット定理, メンガーの定理 —

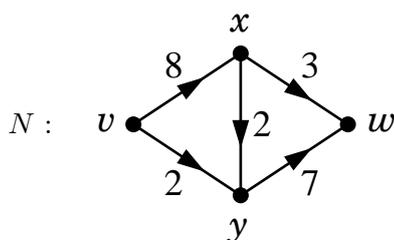
1. ネットワークのカット

有向グラフ $D = (V, A)$ 上のネットワーク $N = (D, \Psi)$ とその入口 v , 出口 w は前回の通りとする。

定義

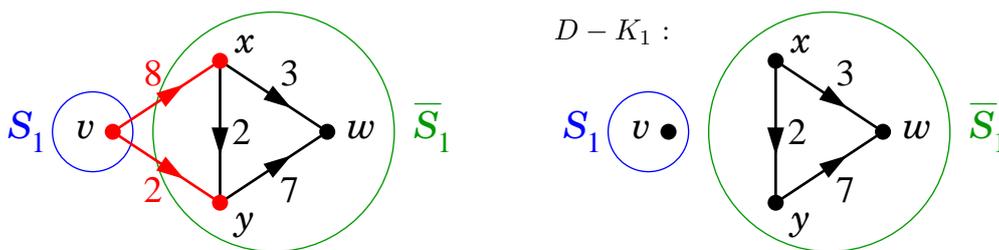
- $V \supset S$ に対し、 $\bar{S} = V - S$ をその補集合とし、 $a = xy$ ($x \in S, y \in \bar{S}$) の形の弧全ての集合を (S, \bar{S}) と表す。
- 特に $v \in S, w \in \bar{S}$ のとき $K = (S, \bar{S})$ を「 N のカット」と呼ぶ。
- N のカット K に属する弧の容量の和を「カット K の容量」と呼ぶ。

例えば

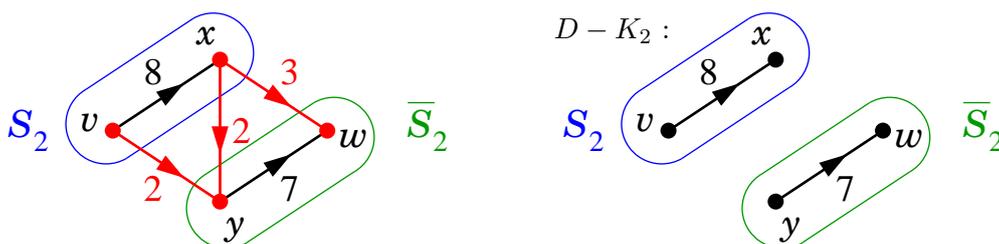


のカットは次の4つ。

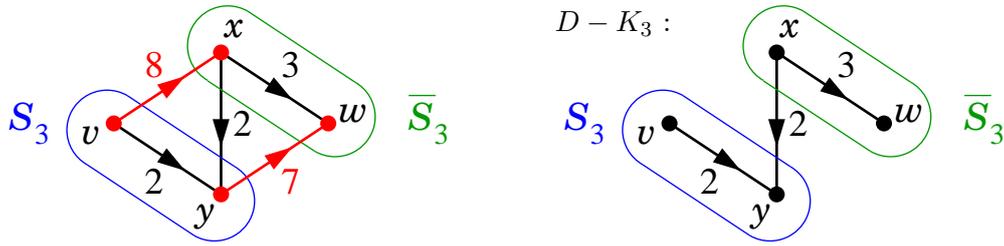
- (1) $S_1 = \{v\}, \bar{S}_1 = \{x, y, w\}$ のとき、赤い弧たちがカット $K_1 = (S_1, \bar{S}_1) = \{vx, vy\}$ で、その容量は $\Psi(K_1) = \Psi(vx) + \Psi(vy) = 8 + 2 = 10$ 。



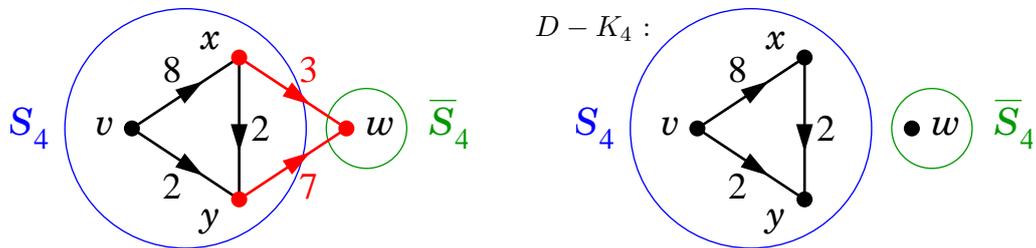
- (2) $S_2 = \{v, x\}, \bar{S}_2 = \{y, w\}$ のとき、 $K_2 = (S_2, \bar{S}_2) = \{vy, xy, xw\}$, $\Psi(K_2) = 2 + 2 + 3 = 7$ 。



(3) $S_3 = \{v, y\}$, $\bar{S}_3 = \{x, w\}$ のとき、 $K_3 = (S_3, \bar{S}_3) = \{vx, yw\}$, $\Psi(K_3) = 8+7 = 15$.



(4) $S_4 = \{v, x, y\}$, $\bar{S}_4 = \{w\}$ のとき、 $K_4 = (S_4, \bar{S}_4) = \{xw, yw\}$, $\Psi(K_4) = 3+7 = 10$.



2. 最大フロー・最小カット定理

定理

φ を N の任意のフロー、 K を N の任意のカットとすると

$$(\varphi \text{ の値}) \leq (K \text{ の容量})$$

が成り立つ。

最大フロー・最小カット定理

φ を N の最大フロー、 K を N の最小カットとすると

$$(\varphi \text{ の値}) = (K \text{ の容量})$$

が成り立つ。

系

N のフロー φ と、 N のカット K が

$$(\varphi \text{ の値}) = (K \text{ の容量})$$

をみたせば、 φ は最大フロー、 K は最小カットである。

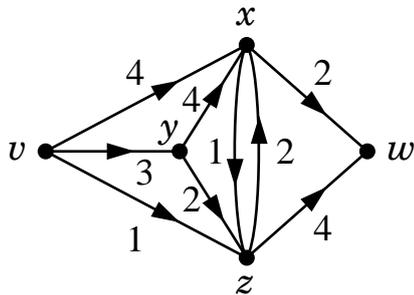
従って、適当に見つけたフロー φ とカット K が

$$(\varphi \text{ の値}) = (K \text{ の容量})$$

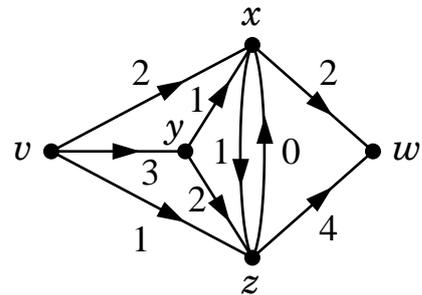
を満たしていれば、残りの容量を表すネットワーク N' を作らなくても φ が最大フローであることがわかる。

教科書 p.183 の例

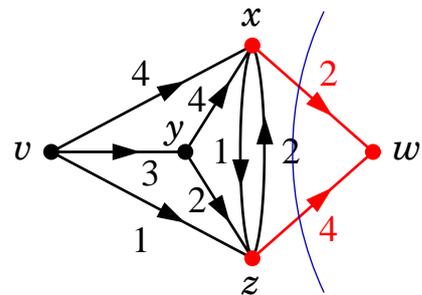
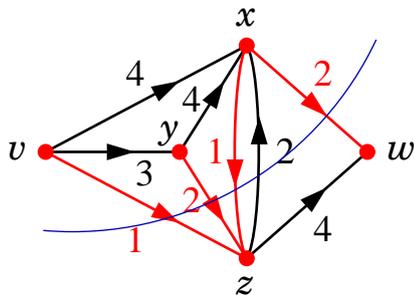
ネットワーク N



最大フロー φ



では、次の赤い弧たちが最小カットである（この例では2とおりある）。



3. メンガーの定理

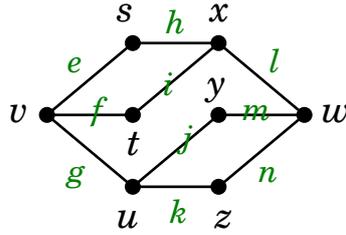
定義

連結グラフ $G = (V, E)$ と $v, w \in V$ に対し、

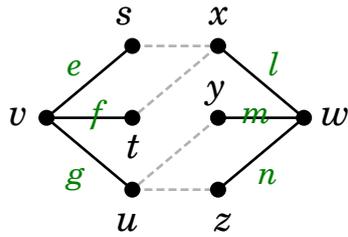
- (1) 辺の部分集合 $F \subseteq E$ が「 vw -非連結化集合」である、とは、任意の $v-w$ 道が F の辺を含むこと。
- (2) 頂点の部分集合 $W \subseteq V$ が「 vw -分離集合」である、とは、任意の $v-w$ 道が W の頂点を中間点として含むこと。

言い換えると

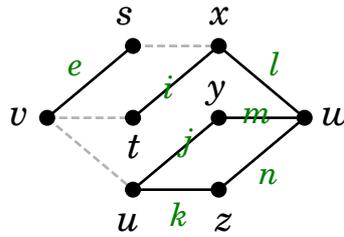
- (1) $\Leftrightarrow G - F$ には $v-w$ 道が無いこと。
- (2) $\Leftrightarrow G - W$ には $v-w$ 道が無いこと。



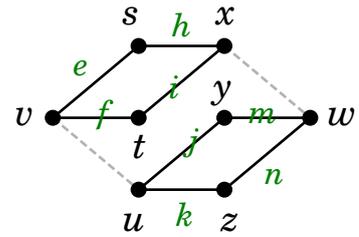
では、例えば $\{h, i, j, k\}$, $\{h, f, g\}$, $\{g, l\}$ はいずれも vw -非連結化集合である。



$G - \{h, i, j, k\}$

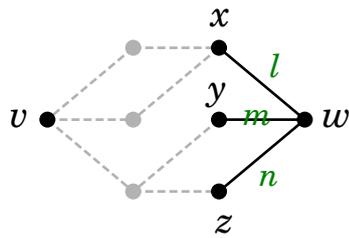


$G - \{h, f, g\}$

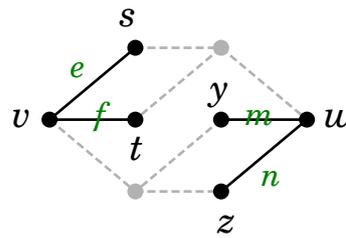


$G - \{g, l\}$

また、 $\{s, t, u\}$ や $\{u, x\}$ は vw -分離集合である。



$G - \{s, t, u\}$



$G - \{u, x\}$

辺形のメンガーの定理

辺素な $v-w$ 道の最大数は、 vw -非連結化集合の辺数の最小値に等しい。

メンガーの定理

点素な $v-w$ 道の最大数は、 vw -分離集合の頂点数の最小値に等しい。

整数性定理

辺形のメンガーの定理は、有向グラフでも（辺を弧に読み替えて）成り立つ。