

組合せとグラフの理論 (塩田)

— グラフの閉路部分空間 —

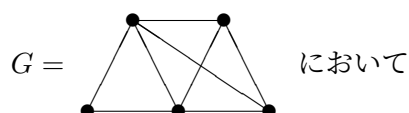
演算 \oplus

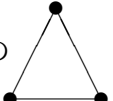
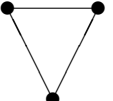
- グラフ G の辺の部分集合 C, D に対し、演算 $C \oplus D$ を集合の XOR (排他的論理和、片方にのみ含まれる辺の集合) で定義する :

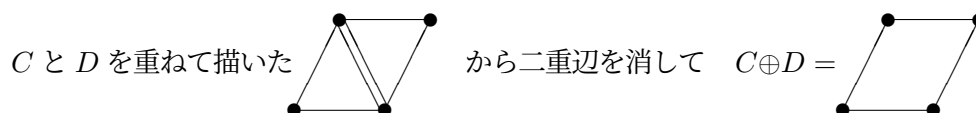
$$C \oplus D = C \text{ XOR } D = (C \cup D) - (C \cap D)$$

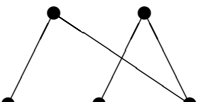
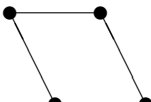
- C, D が閉路 (の辺集合) ならば、 $C \oplus D$ は辺を共有しない閉路いくつかに分けることができる。

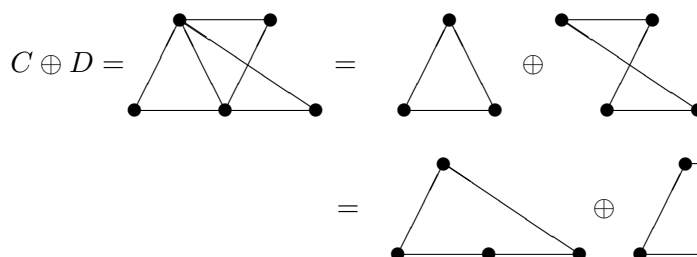
例



- $C =$ 左の  , $D =$  のとき



- $C =$  , $D =$  のときは

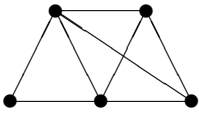


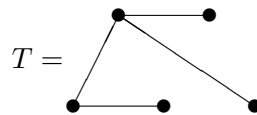
G の閉路部分空間 $W(G)$

- G 内の閉路から $C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_s$ の形で得られる辺の部分集合たちを要素とする集合を $W(G)$ と表し「 G の閉路部分空間」と呼ぶ。空集合 \emptyset もその要素とする。
- $W(G)$ は 2 元体 \mathbf{F}_2 上のベクトル空間になる。

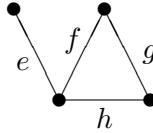
基本閉路集合

- G の全域木 T に、 T に含まれない辺 e を付加すると閉路 C_e がひとつだけできる。そのようにして得られる閉路たちの集合 $\mathcal{F}(T)$ を「 T に関連した基本閉路集合」と呼ぶ。
- $\mathcal{F}(T)$ は $W(G)$ の基底になる。

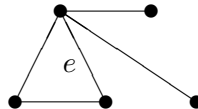
例 $G =$  の全域木として



を取ったとき、 T に含まれない辺は e, f, g, h の4本。

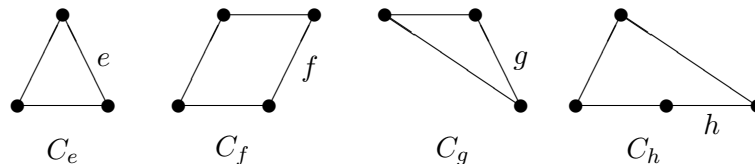


例えば e を T に付加すると



のように閉路がひとつできる。

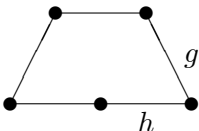
同様に考えると $F(T)$ の要素は次の4つ：



閉路を基本閉路の \oplus で書くアルゴリズム

1° T に含まれない C の辺を e_1, e_2, \dots とする。

2° $C_{e_1} \oplus C_{e_2} \oplus \dots$ を出力

例 $C =$  のとき、 T に含まれない C の辺は g, h の2本。

従って $C = C_g \oplus C_h$.

電気回路への応用

起電力と抵抗から成る電気回路の電流を求める問題では、キルヒホフの法則に従って式を立てる：

(i) キルヒホフの第1法則

頂点では「電流の総和 = 0」が成り立つ。

(ii) キルヒホフの第2法則

閉路では「(抵抗値 \times 電流)の総和 = 電圧の総和」が成り立つ。

このうち (ii) 式は基本閉路に対してのみ立てればよい。なぜなら、閉路たちが

$$D = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_s$$

の関係にあるとき、 D についての (ii) 式は C_j たちについての (ii) 式から導かれるからである。