組合せとグラフの理論　(塩田)　　2023 年度 学期末レポート

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

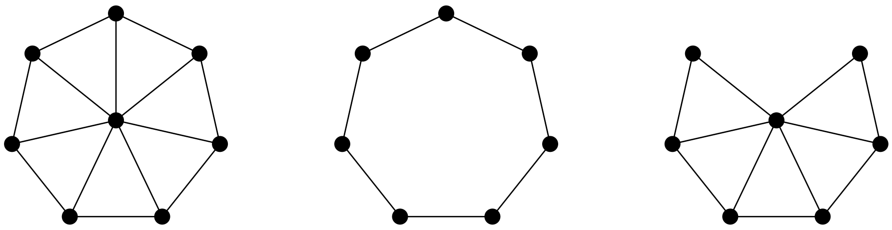
【1】 連結度に関する以下の問いに答えよ。

(1) 車輪グラフ W_n ($n \geqq 5$) の連結度は 3 であることを示せ。(ヒント：連結度 2 のグラフ G には、$G - v$ がカット点を持つような頂点 v が存在する。)

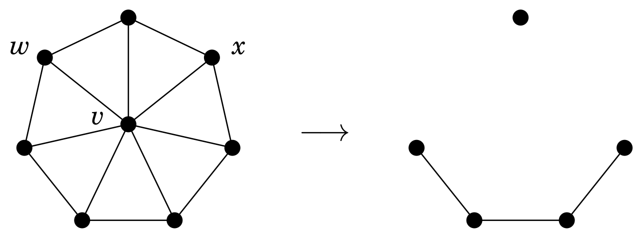
W_n を下左図のように描画して説明する。(図は $n = 8$ の場合)

まず W_n にはカット点が無いので連結度は 2 以上である。

対称性から、W_n から 1 頂点を除去したグラフは下中央・下右図のいずれかと同型となり、いずれもカット点を持たないので、ヒントより、 W_n の連結度は 3 以上であることがわかる。

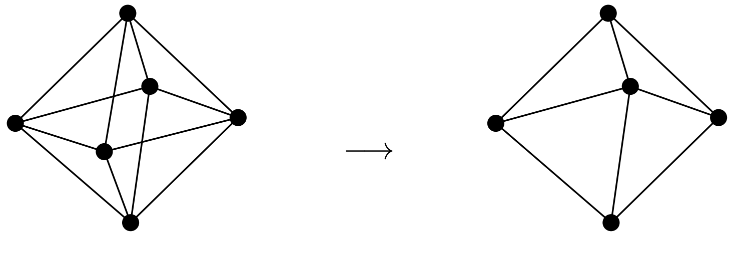


そして、中央の頂点 v と周囲の隣接しない 2 頂点 w, x の合計 3 頂点を除去すると $W_n - \{v, w, x\}$ は非連結となるので、W_n の連結度は 3 である。

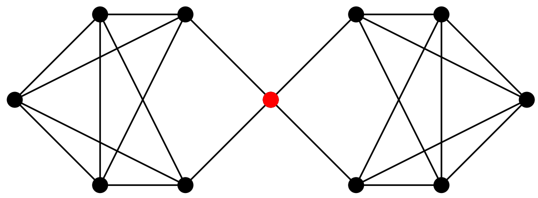


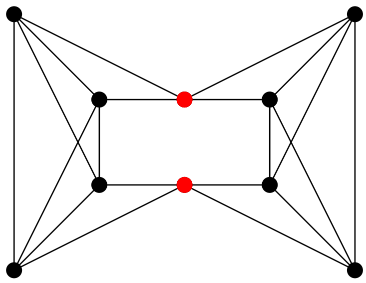
(2) 正八面体グラフの連結度は 4 であることを示せ。

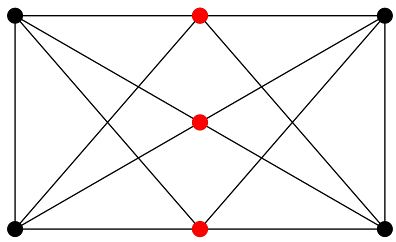
正八面体グラフから任意の 1 頂点を除去したグラフは W_5 と同型であり、(1) より W_5 の連結度は 3 であるので、正八面体グラフの連結度は 4 である。



※　「正八面体グラフは 4-正則だから」、「正八面体グラフの頂点の最小次数は 4 だから」という理由は不正解。次のグラフはいずれも 4-正則だが、連結度はそれぞれ 1, 2, 3 である。







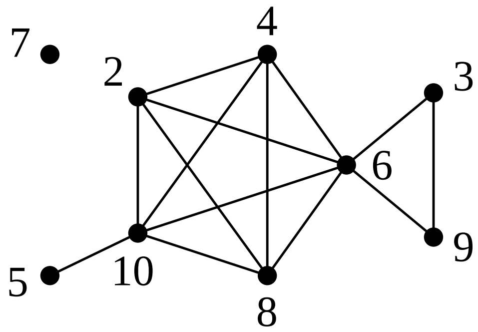
【2】 単純無向グラフ $G = (V, E)$ を次のように構成する：

(a) 頂点集合は 2 から 10 までの自然数の集合 $V = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ とする。

(b) $x, y \in V$ が互いに素でない (最大公約数が 1 でない) とき、x と y を隣接させる。たとえば 6 の隣接点は 2, 3, 4, 8, 9, 10 の 6 個になる。

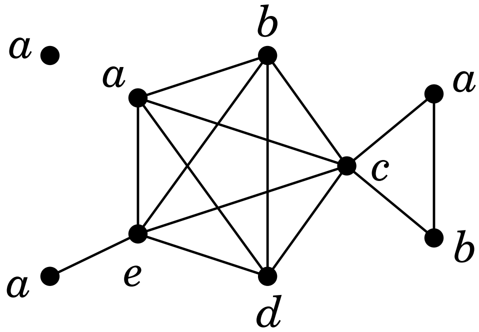
このとき以下の問いに答えよ。

(1) G を図示せよ。



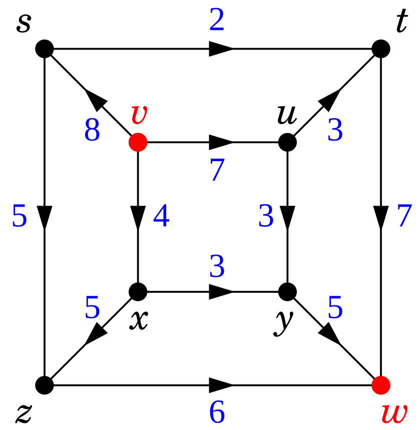
(2) G の彩色数 $\chi(G)$ はいくつか、理由とともに述べよ。

G は部分グラフとして K_5 を含むので $\chi(G) \geqq 5$. 実際に下図のように 5 色で点彩色できるので $\chi(G) = 5$.

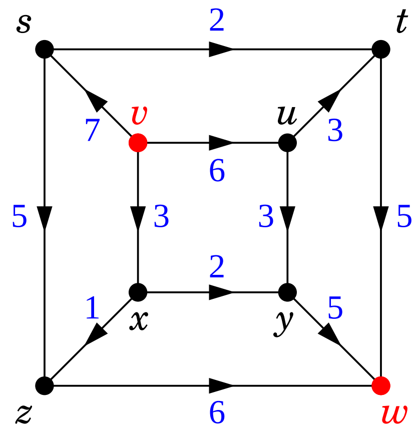


※　メール等で注意したとおり、Welsh-Powell のアルゴリズムは必ずしも彩色数を与える訳ではないので、「Welsh-Powell のアルゴリズムにより」という理由は不正解とした。

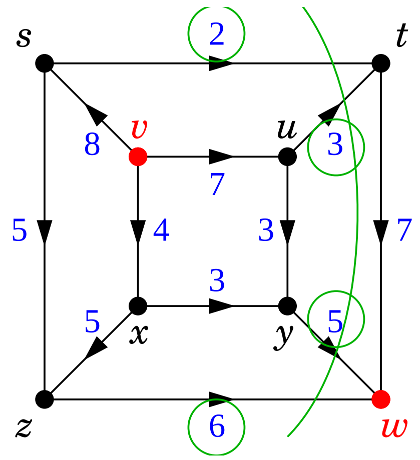
【3】 v を入口、w を出口とする次のネットワーク N について以下の問いに答えよ。



(1) N の最大フロー φ を図示し、そのフローの値を答えよ。



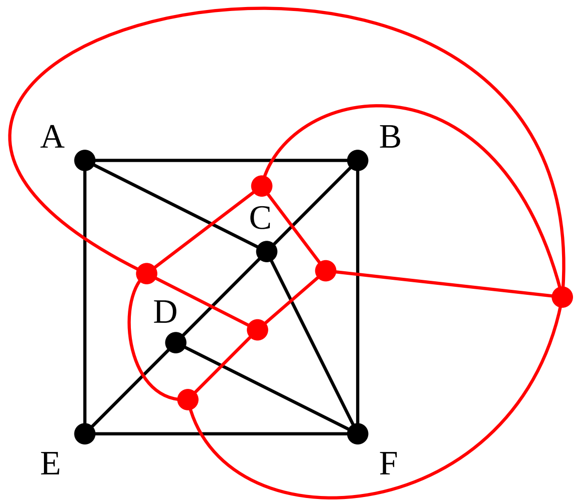
(2) N の最小カット $K = (S, \overline{S})$ を求めよ。($S, \overline{S}$ を答えても良いし、図示でも良い。)



$S = \{s, u, v, x, y, z\}, \overline{S} = \{t, w\}$

【4】

(1) 次の平面グラフ G の幾何学的双対グラフ G^* を図示せよ。

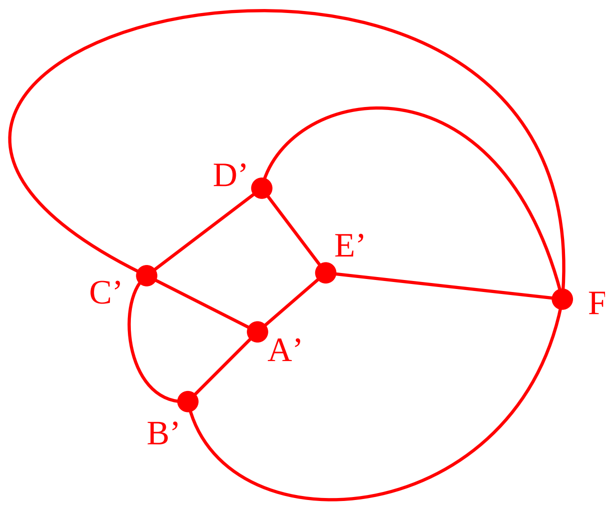


(2) G^* は G と同型であることを示せ。

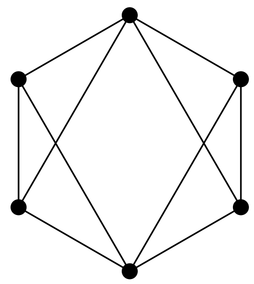
図のように G^* の頂点に名前を付けると、

- A’ の隣接点は B’, C’, E’
- B’ の隣接点は A’, C’, F’
- C’ の隣接点は A’, B’, D’, F’
- D’ の隣接点は C’, E’, F’
- E’ の隣接点は A’, D’, F’
- F’ の隣接点は B’, C’, D’, E’

となり、対応 $A \mapsto A', \cdots, F \mapsto F'$ によって隣接関係が写り合っている。



※　「次数列がどちらも $4, 4, 3, 3, 3, 3$ だから」という理由は不正解。次のグラフも次数列は $4, 4, 3, 3, 3, 3$ だが、次数 4 の頂点同士が隣接していないので、G, G^* とは同型ではない。



※　「同じ次数の点に対して、それぞれの点に隣接する点の次数も一致するから」という理由も、授業で紹介した次の例が反例になる。