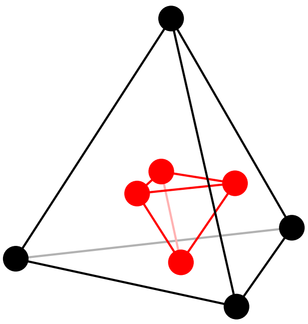
組合せとグラフの理論 （塩田）

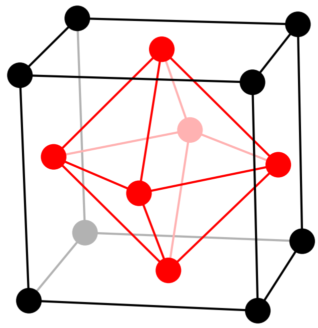
— 平面グラフの双対性 —

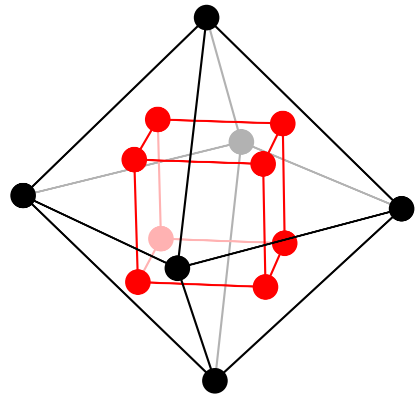
1. プラトングラフの双対性

正四面体グラフ

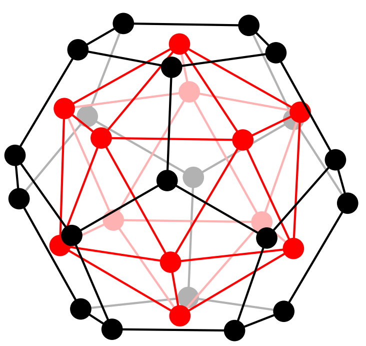


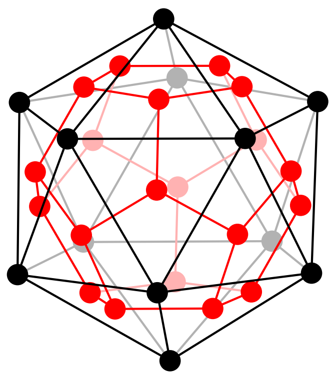
立方体グラフと正八面体グラフ





正十二面体グラフと正二十面体グラフ





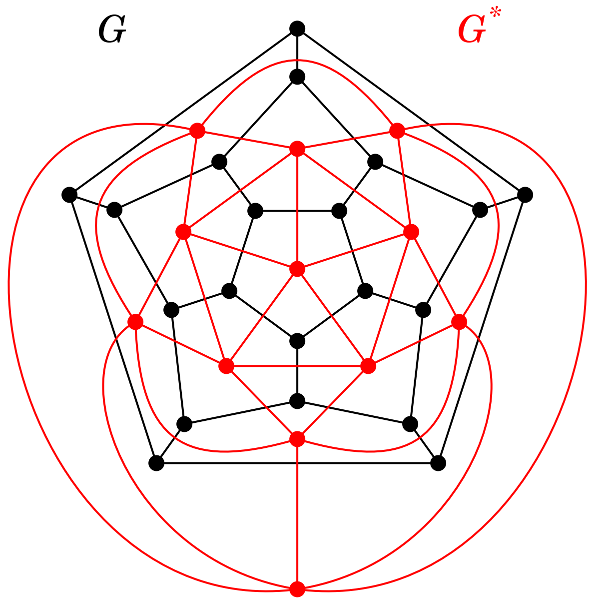
2. 閉路とカットセットの双対性

定理

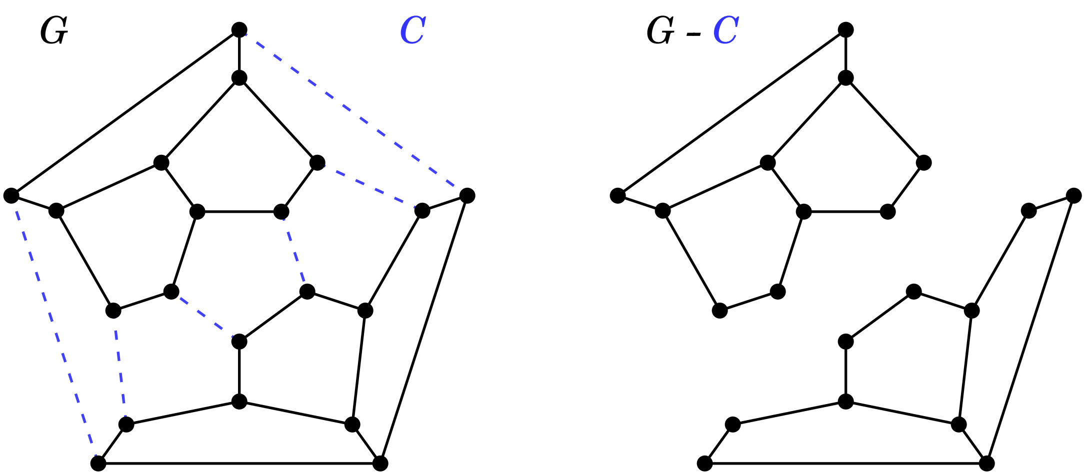
G を連結な平面グラフ、G^* をその双対グラフとし、辺の一対一対応 $e \longleftrightarrow e^*$ によって G, G^* の辺の部分集合 $C \longleftrightarrow C^*$ が対応しているとする: このとき

(1) C が G のカットセットであること $\Leftrightarrow$ C^* が G^* の閉路であること。
(2) C が G の閉路であること $\Leftrightarrow$ C^* が G^* のカットセットであること。

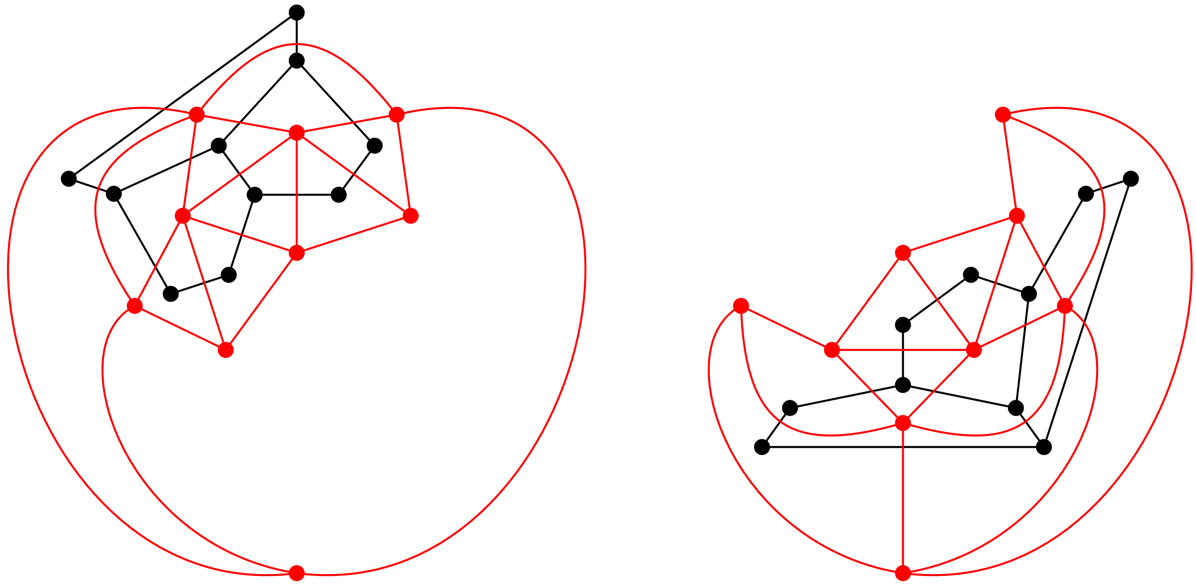
正十二面体グラフ G とその双対グラフである正二十面体グラフ G^* の例を示しながら説明する。



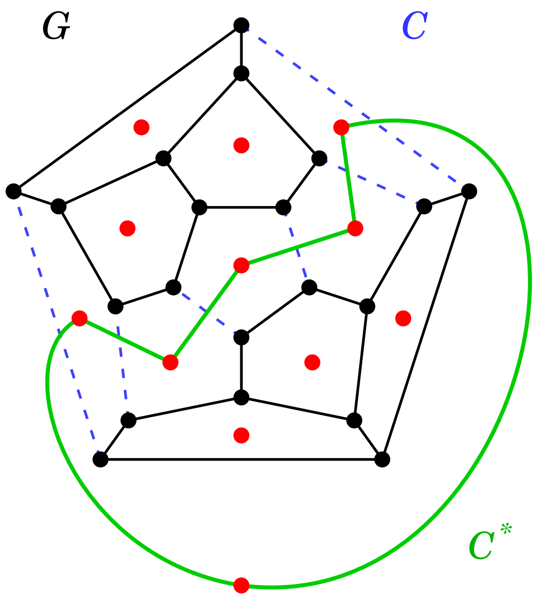
(1) の $\Rightarrow$)　C がカットセットならば $G - C$ はふたつの連結成分に分かれる。



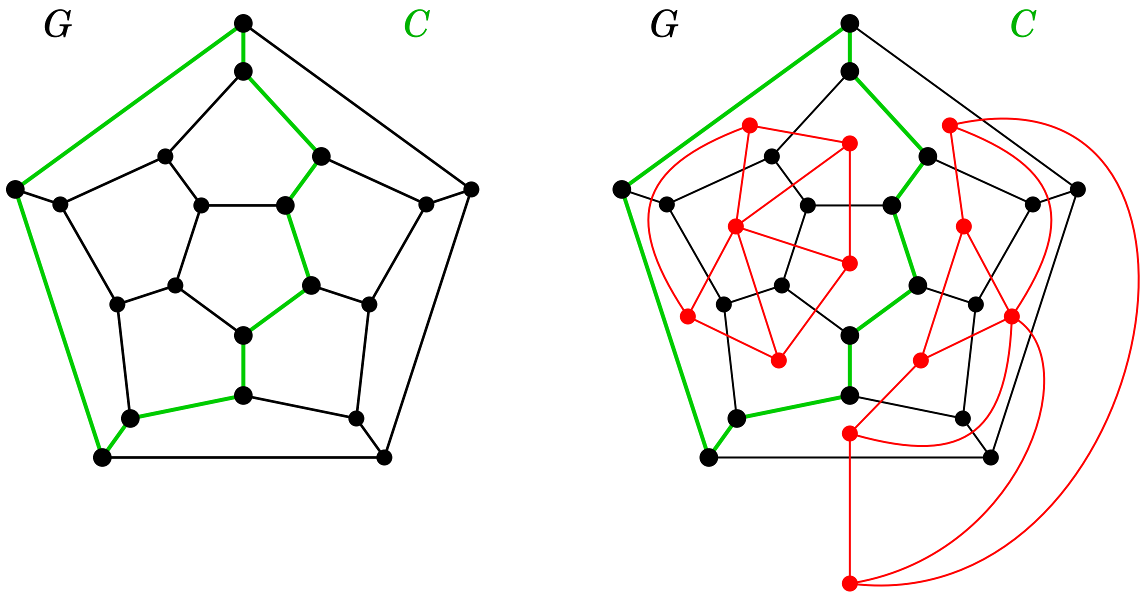
それぞれの連結成分に対応する G^* の面たちは全平面を 2 つに分割する（図では左側が外面を含む）。



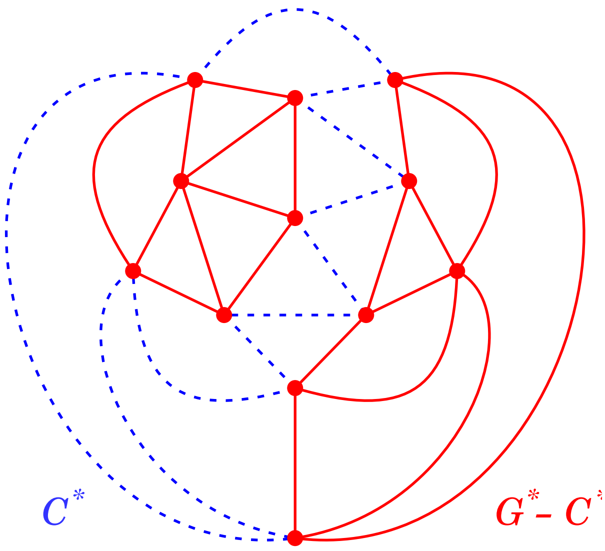
C^* は丁度その境界線に一致する閉路になる。



(2) の ⇒)　 C が閉路ならば、C は G の面たちを 2 つの連結なグループに分ける。すなわち C は G^* を 2 つの連結成分 G_1^*, G_2^* に分ける。



すると、C^* は G_1^* の頂点と G_2^* の頂点を結ぶ G^* の辺全ての集合と一致し、G^* のカットセットになる。



(1), (2) の ⇐) は G と G^* を逆にすると言える。