

組合せとグラフの理論 (塩田)

— 最短路問題・郵便配達員問題・最小連結子問題・巡回セールスマン問題 —

1. 最短路問題

連結な重み付きグラフ G において、出発点 s から目的地 t への最短路を求める問題

ダイクストラ法

入力：連結な重み付きグラフ G と、出発点 s 、目的地 t

出力：最短の $s-t$ 道

1° 全ての頂点 v に仮ラベル $l(v)$ を発行する。

- 出発点 s のラベルは $l(s) = 0$
- s 以外の頂点 v のラベルは $l(v) = \infty$

2° 親を覚える為のリストを用意する。

3° 仮ラベルが最小のものをひとつ選び、永久ラベルに昇格させる。

4° 目的地 t の仮ラベル $l(t)$ が永久ラベルに昇格したら、 t から親を辿って最短路を出力し、終了。

5° 今、永久ラベルに昇格した頂点 x の、すべての未昇格な隣接点 v に対し、

$$l(x) + w(xv) < l(v)$$

であれば

$$\text{新 } l(v) = l(x) + w(xv), \quad (v \text{ の親}) = x$$

と更新する。

6° 3° へ戻る。

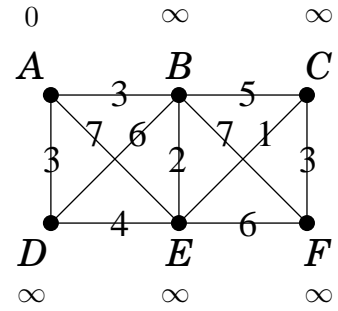
※ 次の追加ルールがあれば誰がやっても同じ最短路が得られる。

追加ルール

ステップ 3° で候補（仮ラベルが最小のもの）が複数あるときは、親の番号（アスキーコード、アルファベット順 etc.）が一番小さいものを選んで永久ラベルに昇格させる。更に親が同じ候補が複数あれば、それ自身の番号が一番小さいものを選ぶ。

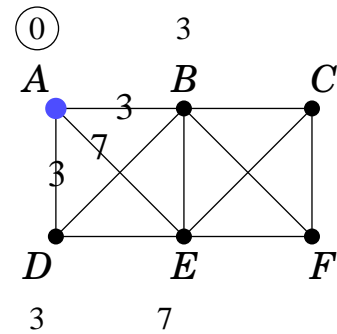
実行例

右の地図について、出発点 $s = A$ から目的地 $t = F$ への最短路を求めてみる。ラベルの初期状態は図の通り。



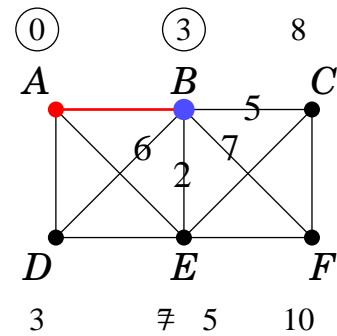
以下、永久ラベルには \circ を付け、 $=$ は仮ラベルが更新されたことを表す。また、永久ラベルに昇格したばかりの頂点を青色で示し、親子関係は赤い辺で表す。なお、仮ラベル ∞ は省略する。

まず出発点の $l(A)$ を永久ラベルに昇格させる。
 A の隣接点 B, D, E の仮ラベルを、 A からの距離 $3, 3, 7$ に更新する。

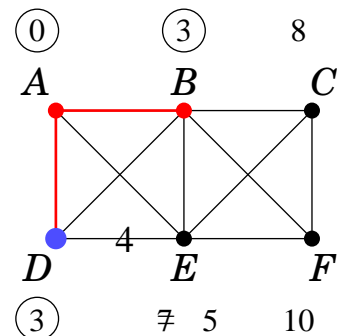


仮ラベル 3 の頂点 B, D は親が同じ A なので、アルファベット順で若い方の $l(B)$ を永久ラベルに昇格させる。

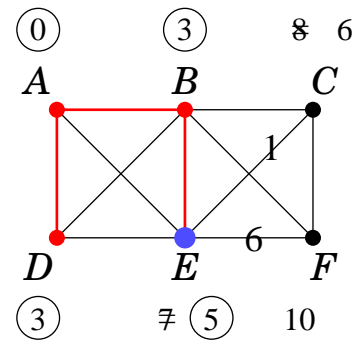
B の未昇格な隣接点の仮ラベルを 5 に従って更新する。特に E は B を経由したルートの方が短いので仮ラベルが 7 から 5 に減る。



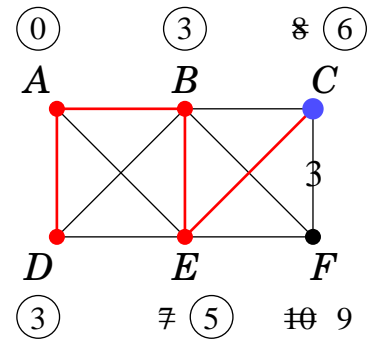
最小の仮ラベル $l(D)$ を永久ラベルに昇格させる。
 D の未昇格な隣接点は E のみだが、 D を経由しても近くならないので仮ラベルは更新されない。



最小の仮ラベル $l(E)$ を永久ラベルに昇格させる。
 C は E を経由したルートの方が短いので仮ラベルが 8 から 6 に減っている。

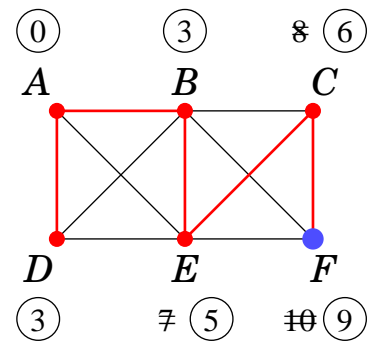


最小の仮ラベル $l(C)$ を永久ラベルに昇格させる。
 F は C を経由したルートの方が短いので仮ラベルが 10 から 9 に減っている。



目的地の $l(F)$ が永久ラベルに昇格して終了する。
 最短経路は $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow F$.

※ 慣れてくればこの絵ひとつで作業できるようになる。



2. 郵便配達員問題

連結な重み付きグラフ G において、全ての辺を 1 回以上通る、重み最小の閉じた歩道を求める問題

オイラーグラフの場合

任意のオイラーサーキットが解になる。

オイラーグラフでない半オイラーグラフの場合

奇数次数の 2 頂点を u, v とするとき、最短の $u-v$ 道 P と、 v から u への一筆書き Q をつないだ歩道が最適解になる。

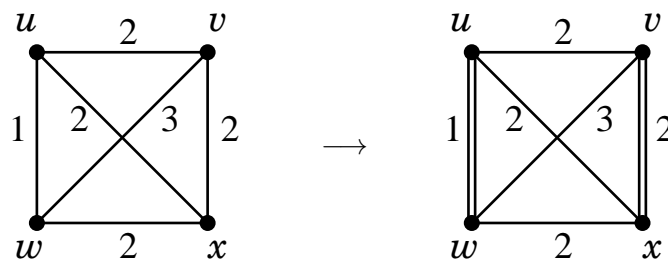
奇数次数の頂点が4個の場合の例

奇数次数の4頂点を u, v, w, x とするとき、

- (1) 最短の $u-v$ 道と、最短の $w-x$ 道
- (2) 最短の $u-w$ 道と、最短の $v-x$ 道
- (3) 最短の $u-x$ 道と、最短の $v-w$ 道

の3通り組合せのうち、距離の合計が最小の場合の、最短路上の辺を二重化したグラフのオイラーサーキットが最適解となる。

例えば次のグラフでは、 uw と vx を2重化すれば追加の重みが最小でオイラーグラフにできる。



奇数次数の頂点が多くなると考えるべき組合せが膨大になるので、マッチング・アルゴリズムを応用することになる。

3. 最小連結子問題

連結な重み付きグラフ G において、重み最小の全域木 T を求める問題

クラスカル法

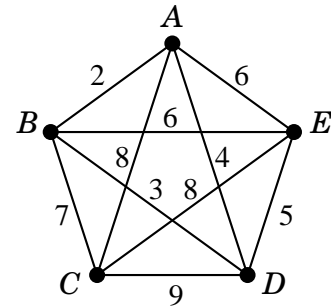
入力：連結な重み付きグラフ G

出力：重み最小の全域木 T

- 1° (辺集合として) T の初期値は空集合 \emptyset とする。
- 2° $n = (G$ の頂点数), $j = 1$ とおく。
- 3° T に付加しても閉路を作らない辺のうち、重み最小のものを e_j とする。
- 4° T に e_j を付加し、 $j \leftarrow j + 1$ 。
- 5° $j = n$ ならば T を出力して終了。そうでなければ 3° へ戻る。

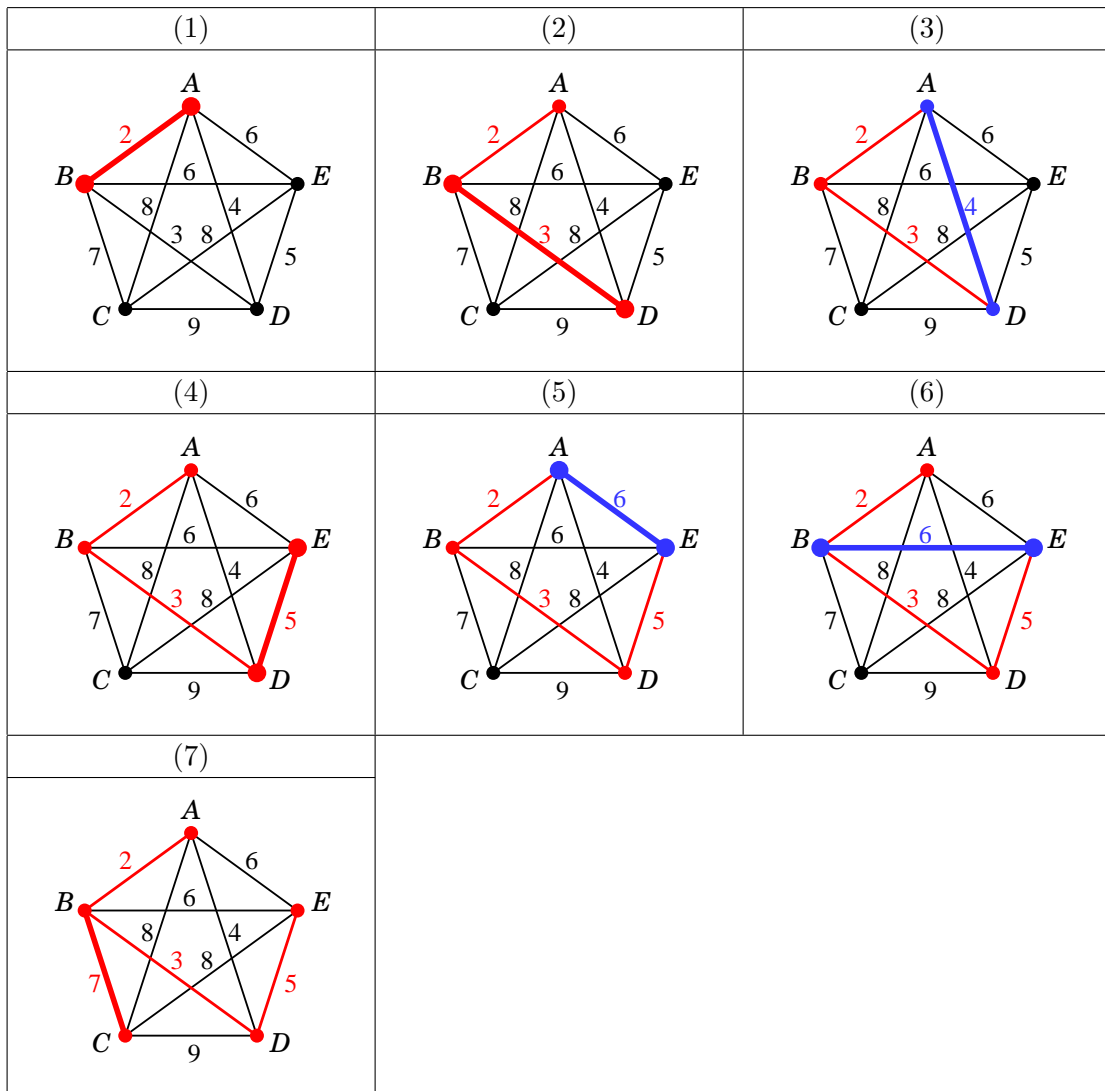
実行例

右のグラフでクラスカル法を実行してみる。



重みの小さい順に辺をソートして考えると、

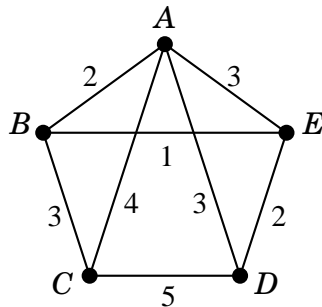
- (1) 重み 2: $AB = e_1$ を T に付加
- (2) 重み 3: $BD = e_2$ を T に付加
- (3) 重み 4: AD は T に付加すると閉路を作ってしまうので不採用
- (4) 重み 5: $ED = e_3$ を T に付加
- (5) 重み 6: AE は T に付加すると閉路を作ってしまうので不採用
- (6) 重み 6: BE は T に付加すると閉路を作ってしまうので不採用
- (7) 重み 7: $BC = e_4$ を T に付加して終了



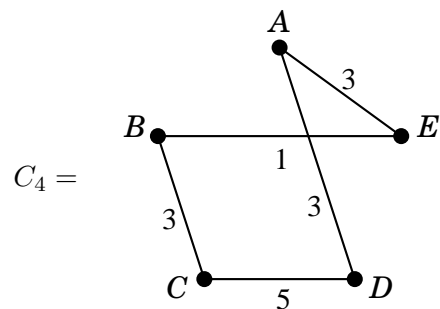
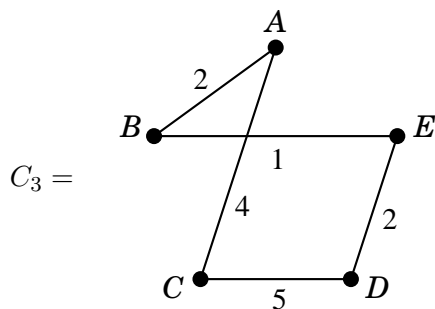
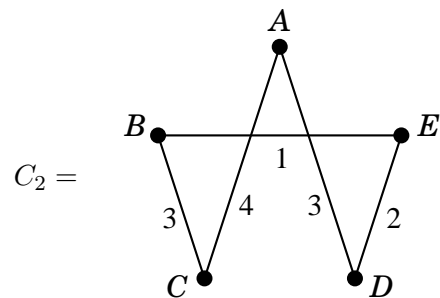
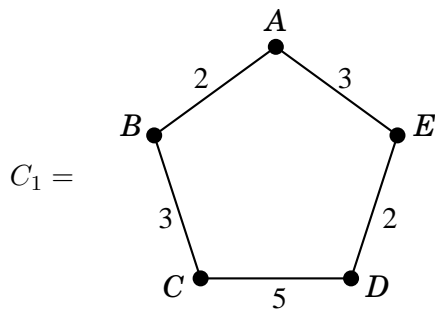
4. 巡回セールスマン問題

重み付きハミルトングラフ G において、重み最小のハミルトンサイクル C を求める問題

グラフが小さければ全検索で答が見つかる。たとえば次のグラフ



ではハミルトンサイクルは次の4つで、



$w(C_1) = 15, w(C_2) = 13, w(C_3) = 14, w(C_4) = 15$ のうち最小のものは $w(C_2) = 13$.

しかし、巡回セールスマン問題を解く高速なアルゴリズムは見つかっていない。巨大なグラフでは、膨大な時間を掛けて最適解を求めるより、

- 遺伝的アルゴリズム
- シミュレーテッド・アニーリング法

などを使って「ましな解」を見つける方が現実的である。