組合せとグラフの理論 （塩田）

— 彩色多項式 —

1. 彩色多項式

定義　グラフ G を x 色で点彩色する場合の数を $P_G(x)$ と表すと、$P_G(x)$ は x の多項式になる。これを「G の彩色多項式」と呼ぶ。

定理　G の勝手な辺 e を取り、$H = G - e$（除去）、$K = G \backslash e$（縮約）と置くとき、$P_G(x) = P_H(x) - P_K(x)$ が成り立つ。

彩色数を求めるアルゴリズム

1° 上の定理を用いた再帰的プログラムで $P_G(x)$ を計算する。

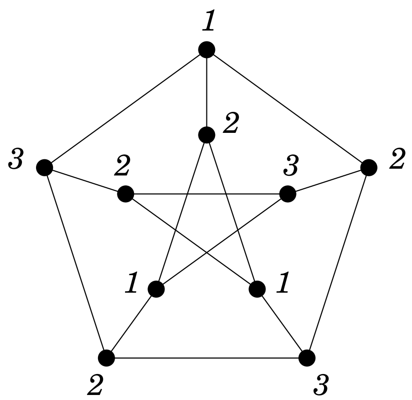
2° $P_G(x)$ の一次因子を $x, x-1, \cdots$ の順に括り出してゆく。

3° 始めて割り切れなくなった一次因子を $x-k$ とすると、k が彩色数。

例：ピータースングラフの場合

```
Graph :

 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0
 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0
 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0
 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1
 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0
 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1
 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1
 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0
 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0
```



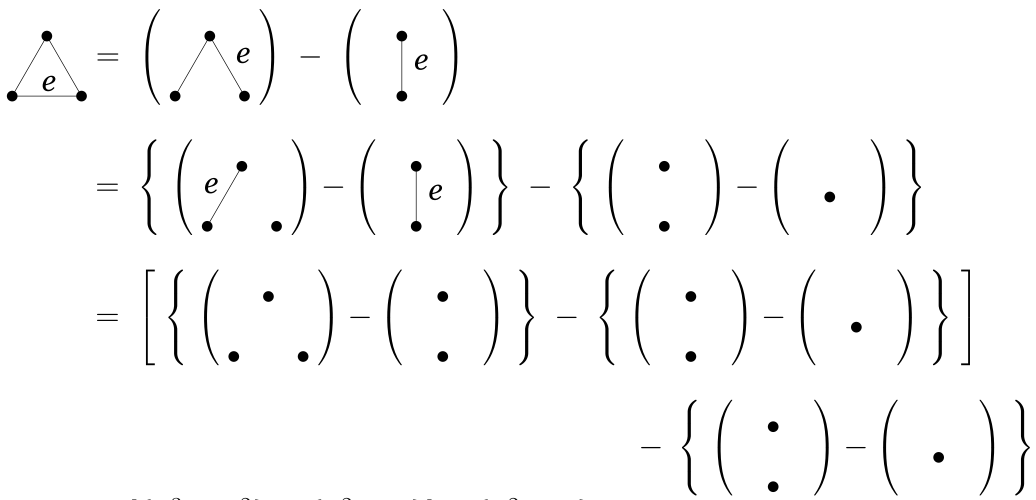

```
彩色多項式 :
X^10 - 15 X^9 + 105 X^8 - 455 X^7 + 1353 X^6 - 2861 X^5
+ 4275 X^4 - 4305 X^3 +2606 X^2 - 704 X

一次因子抽出 :
X (X - 1) (X - 2) (X^7 - 12 X^6 + 67 X^5 - 230 X^4
+ 529 X^3 - 814 X^2 + 775 X - 352)

彩色数 = 3
```

2. 再帰的プログラムの動作（K_3 の場合）

空グラフに達するまで再帰呼び出しを繰り返すようにプログラミングすると、以下のような計算が実行される。このことから、彩色多項式は「多項式である」ことがわかる。（教科書 pp.140-141 にならってグラフの絵で彩色多項式を表している。）



$$= [\{x^3 - x^2\} - \{x^2 - x\}] - \{x^2 - x\}$$
$$= x^3 - 3x^2 + 2x$$

※　手計算では、教科書 p.141 のように K_n, N_n, 木, グラフの和等の公式を上手に使え。

3. 彩色多項式の例

定理　G のオーダー、サイズを n, m とすると　$P_G(x) = x^n - mx^{n-1} + \cdots$. 係数の符号は上から交互に $+, -, +, -, \cdots$ となり、最低次の次数は G の連結成分の個数に等しい。

グラフ	n	m	彩色多項式
C_6	6	6	$x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 5x$ $= x(x-1)(x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 5)$
$K_{3,3}$	6	9	$x^6 - 9x^5 + 36x^4 - 75x^3 + 78x^2 - 31x$ $= x(x-1)(x^4 - 8x^3 + 28x^2 - 47x + 31)$
W_6	6	10	$x^6 - 10x^5 + 40x^4 - 80x^3 + 79x^2 - 30x$ $= x(x-1)(x-2)(x-3)(x^2 - 4x + 5)$
正八面体グラフ	6	12	$x^6 - 12x^5 + 58x^4 - 137x^3 + 154x^2 - 64x$ $= x(x-1)(x-2)(x^3 - 9x^2 + 29x - 32)$
$K_2 \cup K_3$	5	4	$x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2 = x^2(x-1)^2(x-2)$