組合せとグラフの理論　(塩田)

— ネットワークフロー —

1. ネットワーク

- 連結な重み付き有向グラフ $N = (D, \Psi)$ を「ネットワーク」と呼ぶ。ここで $D = (V, A)$ は有向グラフであり、各弧 $a \in A$ に対して非負の重み $\Psi(a) \geqq 0$ が設定されているとする。$\Psi(a)$ を「 a の容量」と呼ぶ。

- 重み付きの入出次数を

$$\begin{aligned} \mathrm{indeg}(\Psi, x) &= \big(x \text{ に入る弧 } a \text{ についての } \Psi(a) \text{ の合計}\big), \\ \mathrm{outdeg}(\Psi, x) &= \big(x \text{ から出る弧 } a \text{ についての } \Psi(a) \text{ の合計}\big) \end{aligned}$$

  と定める。

- $\mathrm{indeg}(\Psi, v) = 0$ を満たす頂点 v を「入口」、$\mathrm{outdeg}(\Psi, w) = 0$ を満たす頂点 w を「出口」と呼ぶ。

- 以下、簡単のため入口は v ひとつ、出口は w ひとつであるとする。

2. フロー

- D 上のもうひとつの重み φ が「 N のフロー」である、とは
  (1) すべての弧 $a \in A$ について $0 \leqq \varphi(a) \leqq \Psi(a)$ が成り立ち、
  (2) 入口 v, 出口 w 以外の全ての頂点 $x \in V$ について $\mathrm{indeg}(\varphi, x) = \mathrm{outdeg}(\varphi, x)$ が成り立つこと。

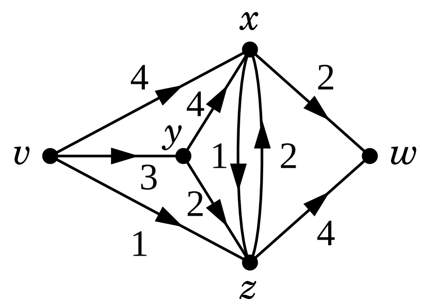
- フロー φ に対しては $\mathrm{outdeg}(\varphi, v) = \mathrm{indeg}(\varphi, w)$ が成り立ち、この値を「フロー φ の値」と呼ぶ。

- フローの値が最大となるフローを「最大フロー」と呼ぶ。

フローとは「流れ」のことで、例えばコンピュータネットワークであれば、(1) は回線の容量以内でデータが流れていることを、(2) は各中継点でデータの流入量と流出量が釣り合っていることを意味する。

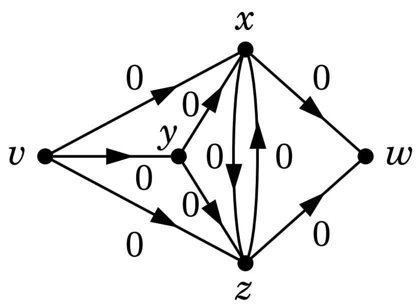
フローの値はサーバ v からクライアント w への通信速度であり、最大通信速度を達成している状態が最大フローになる。

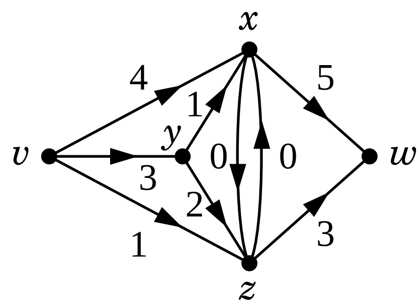
3. 教科書の例

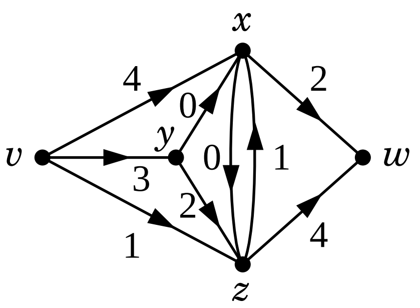
$N:$ 

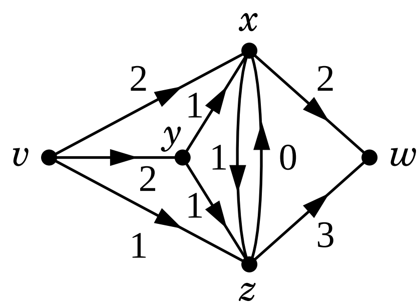
4. 練習問題

次のうち、3. のネットワークのフローになっているものはどれか。

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

5. 最大フローアルゴリズム

1° そこそこのフローをみつけて φ の初期値とする。
(機械にやらせるときはゼロフローを初期値にする。)

2° 「残りの容量」を表すネットワーク $N' = (D, \Psi')$ を

$$\begin{cases} \Psi'(a) = \Psi(a) - \varphi(a) \\ \Psi'(a^{-1}) = \varphi(a) \end{cases} \qquad (\ a \in A\ )$$

によって定める。ただし a^{-1} は a と逆方向の弧で、a^{-1} が無いときは新たに作る。

3° N' において v-w 道 P を探索し、P が見つからなければ終了する。
(たとえば v を根とする幅優先探索を弧の向きに沿って実行すればよい。)

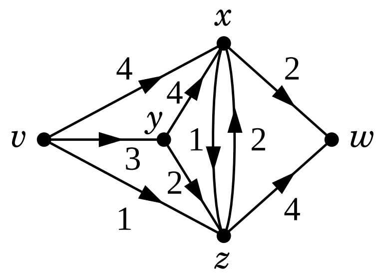
4° P 上の弧 a の、N' における容量 $\Psi'(a)$ のうち最小の値を P 全体に与えて増加道 ε を作る。(ε はひとつのフローになる。)

5° 重みを足し合わせて (新 φ) $= \varphi + \varepsilon$ とし、2° へ戻る。

6. 最大フローアルゴリズム実行例

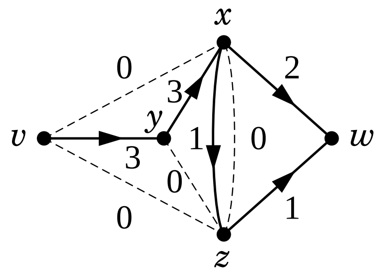
3. の例で最大フローアルゴリズムを実行してみよう。

N :



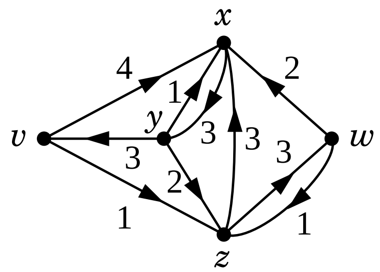
1° φ の初期値として右図のフローを与える。

φ :



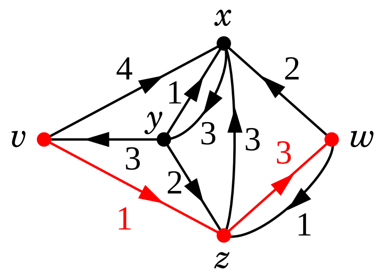
2° 残りの容量を表すネットワーク N' を求める。
(簡単のため容量 0 の弧は省略してある。)

N' :



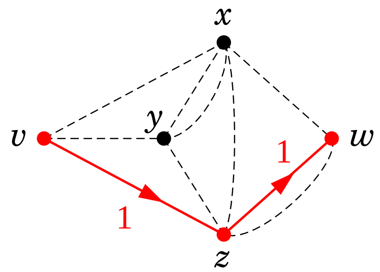
3° N' において v を根とする BFS を実行し v-w 道 P を求める。

P :



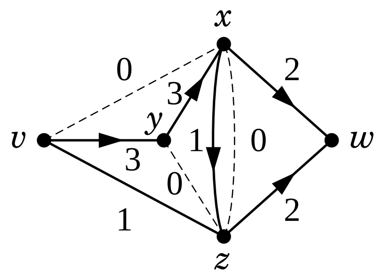
4° P の一番細い部分に合わせて増加道 ε を作る。

ε :



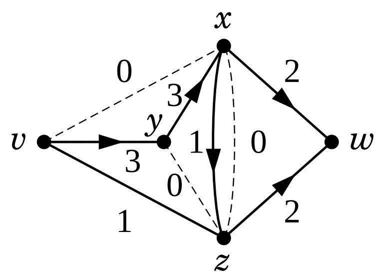
5° (新 φ) $= \varphi + \varepsilon$ とする。

φ :



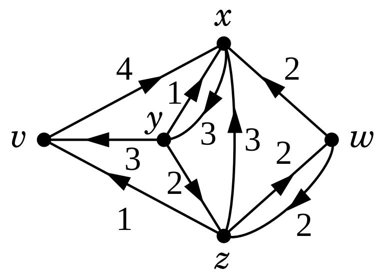
ページが変わったのでもう一度 φ を表示

φ :



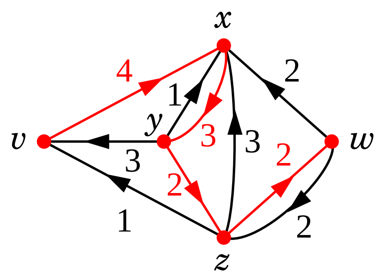
2° N' を求める。
($\Psi - \varphi$ で計算しても、$\Psi' - \varepsilon$ で計算しても結果は同じになる。)

N' :



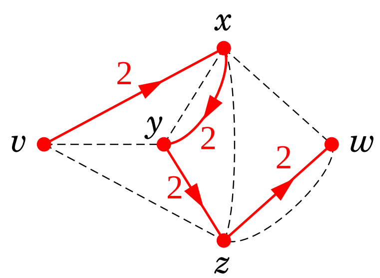
3° N' において v を根とする BFS を実行し v-w 道 P を求める。

P :



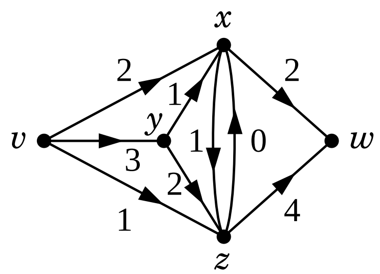
4° P の一番細い部分に合わせて増加道 ε を作る。

ε :



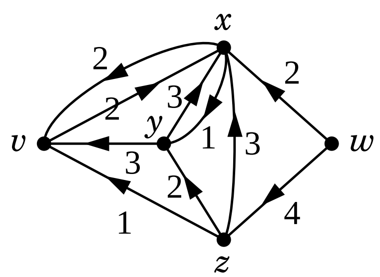
5° (新 φ) $= \varphi + \varepsilon$ とする。
ただし、yx と xy は逆向きなので、重み 3 と 2 を相殺して yx の重みを 1 とする。

φ :



2° N' を求める。

N' :



3° N' には v-w 道が無いのでここで終了する。