組合せとグラフの理論　(塩田)

— 最大フロー・最小カット定理, メンガーの定理 —

1. ネットワークのカット

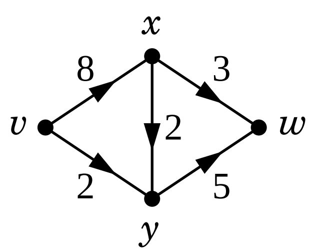
有向グラフ $D = (V, A)$ 上のネットワーク $N = (D, \Psi)$ とその入口 v, 出口 w は前回の通りとする。

定義

- $V \supset S$ に対し、$\overline{S} = V - S$ をその補集合とし、$a = xy$ ($x \in S$, $y \in \overline{S}$) の形の弧全ての集合を $(S, \overline{S})$ と表す。
- 特に $v \in S$, $w \in \overline{S}$ のとき $K = (S, \overline{S})$ を「N のカット」と呼ぶ。
- N のカット K に属する弧の容量の和を「カット K の容量」と呼ぶ。

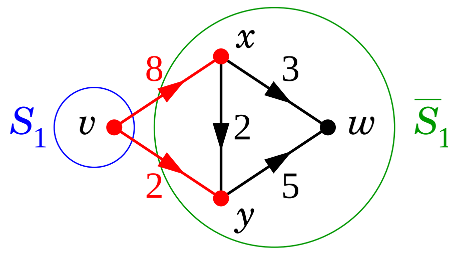
例えば

N :

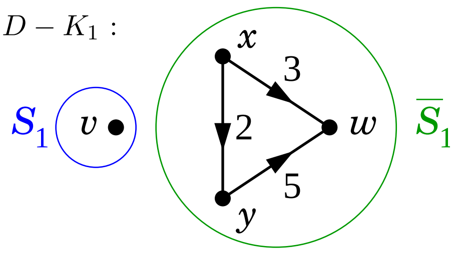


のカットは次の４つ。

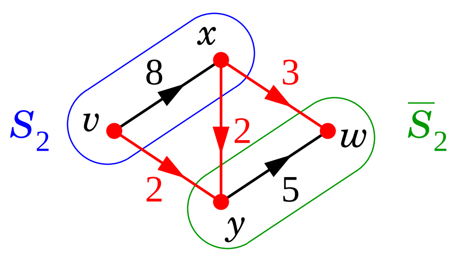
(1) $S_1 = \{ v \}$, $\overline{S_1} = \{ x, y, w \}$ のとき、赤い弧たちがカット $K_1 = (S_1, \overline{S_1}) = \{ vx, vy \}$ で、その容量は $\Psi(K_1) = \Psi(vx) + \Psi(vy) = 8 + 2 = 10$.



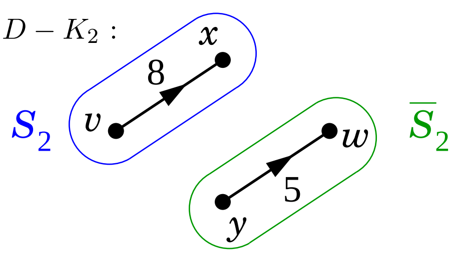
$D - K_1$:



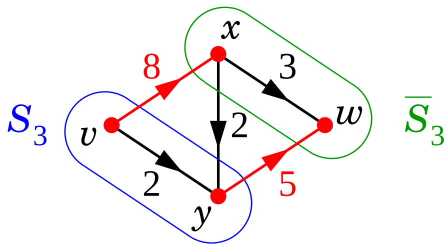
(2) $S_2 = \{ v, x \}$, $\overline{S_2} = \{ y, w \}$ のとき、$K_2 = (S_2, \overline{S_2}) = \{ vy, xy, xw \}$, $\Psi(K_2) = 7$.



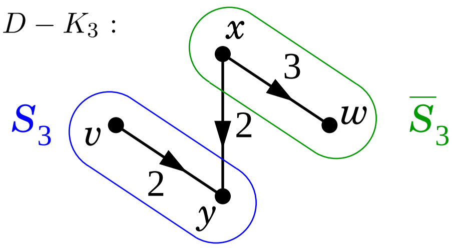
$D - K_2$:



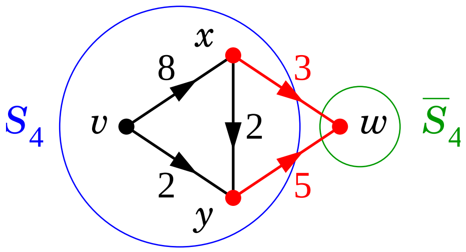
(3) $S_3 = \{\, v, y \,\}$, $\overline{S_3} = \{\, x, w \,\}$ のとき、$K_3 = (S_3, \overline{S_3}) = \{\, vx, yw \,\}$, $\Psi(K_3) = 13$.



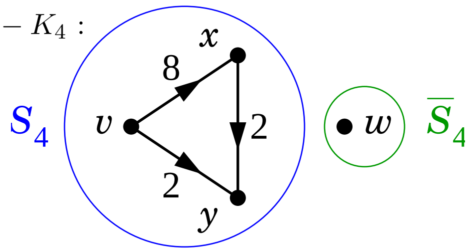
$D - K_3$:



(4) $S_4 = \{\, v, x, y \,\}$, $\overline{S_4} = \{\, w \,\}$ のとき、$K_4 = (S_4, \overline{S_4}) = \{\, xw, yw \,\}$, $\Psi(K_4) = 8$.



$D - K_4$:



2. フローとカットの関係

定理

φ を N の任意のフロー、K を N の任意のカットとすると

$$(\varphi \text{ の値 }) \leqq (K \text{ の容量})$$

が成り立つ。

最大フロー・最小カット定理

φ を N の最大フロー、K を N の最小カットとすると

$$(\varphi \text{ の値 }) = (K \text{ の容量})$$

が成り立つ。

定理

N のフロー φ と、 N のカット K が

$$(\varphi \text{ の値 }) = (K \text{ の容量})$$

をみたせば、φ は最大フロー、K は最小カットである。

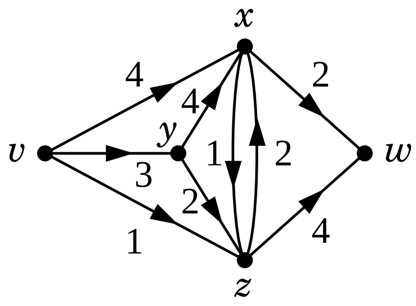
従って、適当に見つけたフロー φ とカット K が

$$(\varphi \text{ の値 }) = (K \text{ の容量})$$

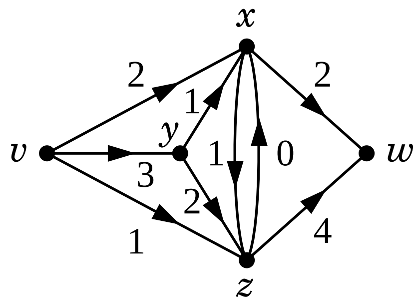
を満たしていれば、残りの容量を表すネットワーク N' を作らなくても φ が最大フローであることがわかる。

教科書 p.183 の例

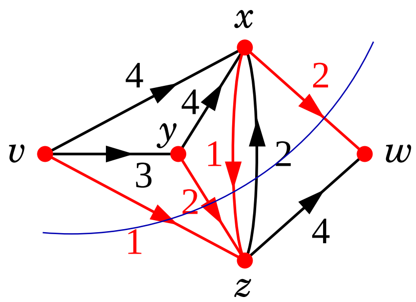
ネットワーク N

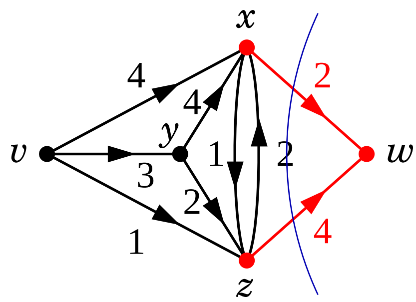


最大フロー φ



では、次の赤い弧たちが最小カットである（この例では 2 とおりある）。





3. メンガーの定理

定義

連結グラフ $G = (V, E)$ と $v,\ w \in V$ に対し、

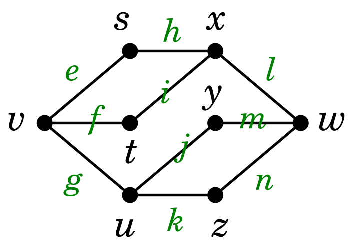
(1) 辺の部分集合 $F \subseteq E$ が「vw-非連結化集合」である、とは、任意の v-w 道が F の辺を含むこと。

(2) 頂点の部分集合 $W \subseteq V$ が「vw-分離集合」である、とは、任意の v-w 道が W の頂点を中間点として含むこと。

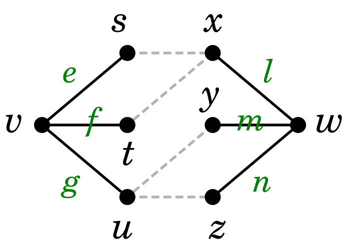
言い換えると

(1) $\Leftrightarrow$ $G - F$ には v-w 道が無いこと。

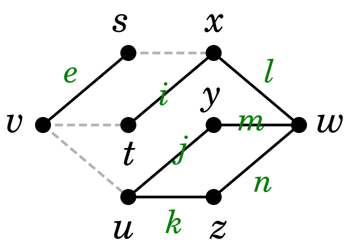
(2) $\Leftrightarrow$ $G - W$ には v-w 道が無いこと。



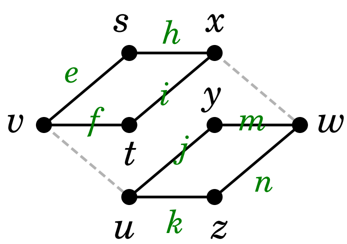
では、例えば $\{h,\, i,\, j,\, k\}$, $\{h,\, f,\, g\}$, $\{g,\, \ell\}$ はいずれも vw-非連結化集合である。



$G - \{h,\, i,\, j,\, k\}$

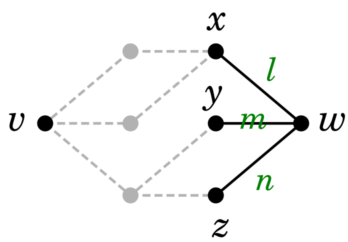


$G - \{h,\, f,\, g\}$

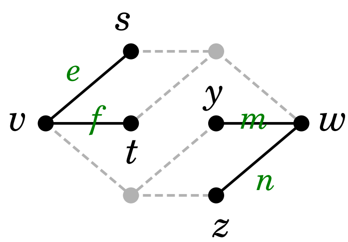


$G - \{g,\, \ell\}$

また、$\{s,\, t,\, u\}$ や $\{u,\, x\}$ は vw-分離集合である。



$G - \{s,\, t,\, u\}$



$G - \{u,\, x\}$

辺形のメンガーの定理

辺素な v-w 道の最大数は、vw-非連結化集合の辺数の最小値に等しい。

メンガーの定理

点素な v-w 道の最大数は、vw-分離集合の頂点数の最小値に等しい。

整数性定理

辺形のメンガーの定理は、有向グラフでも（辺を弧に読み替えて）成り立つ。