

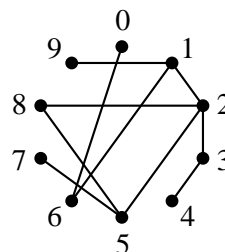
組合せとグラフの理論 (塩田)

— マッチング —

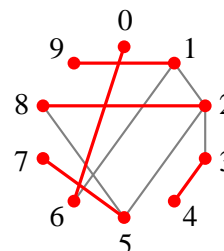
1. マッチングとは

問

10人の刑事を2人ずつのペアにして捜査を行いたい。ただし、気の合わない者をペアにして支障をきたすといけけないので、気の合う者同士のみをペアに作ることにする。「気の合う関係」が右のグラフで表されるとき、どのようなペアを作ればよいか。

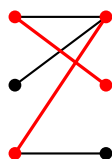
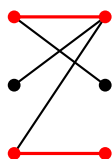
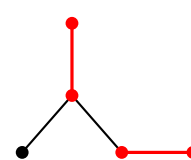
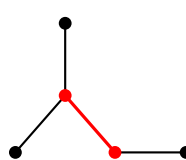
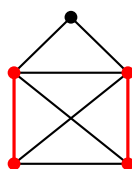
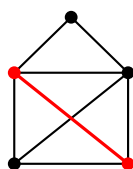


解 例えば次の赤い部分グラフのように組み合わせれば5つのペアを作ることができる。



定義

単純無向グラフ G の 1-正則な部分グラフ M を「 G のマッチング」と呼ぶ。



など

※ 全く辺のない「ゼロマッチング」もマッチングのひとつと考える。

定義

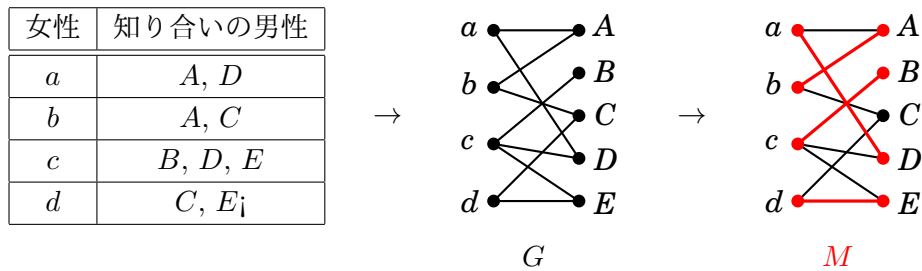
辺の本数が最大となるマッチングを「最大マッチング」と呼ぶ。

2. 二部グラフのマッチング

結婚問題

適齢期の女性 m 人、男性 n 人のグループがあるとする ($m \leq n$)。全ての女性がこのグループ内の知り合いの男性と結婚できる条件は何か。

知り合い関係が次の表で表されているとき、この関係を表すグラフは図の G となり、たとえばマッチング M のように組み合わせると全ての女性が知り合いと結婚できる。



定義

二部グラフ $G = G(V_1, V_2)$ において、 V_1 に属する頂点をすべて含むマッチングを「 V_1 から V_2 への完全マッチング」と呼ぶ。

※ 結婚問題は、 V_1 を女性、 V_2 を男性の集合として、 V_1 から V_2 への完全マッチングが存在するための条件は何か、と言い換えられる。男性は余っても構わないことに注意。

V_1 の部分集合 A に対して

$$\varphi(A) = \{ A \text{ に属する頂点の隣接点たち } \}$$

を A の近傍と言う ($\varphi(A)$ は V_2 の部分集合である)。このとき、

ホールの結婚定理

V_1 から V_2 への完全マッチングが存在すること

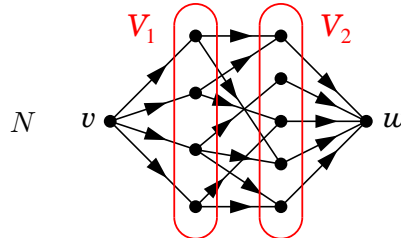
$$\Leftrightarrow \text{任意の } A \subseteq V_1 \text{ に対して } |\varphi(A)| \geq |A| \text{ が成り立つこと } \dots (*)$$

条件 (*) が成立するしないに関わらず、次のアルゴリズムは二部グラフの最大マッチングを与える。

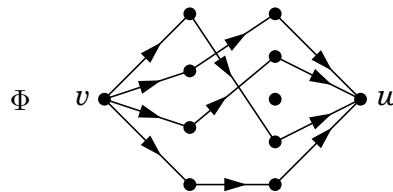
二部グラフの最大マッチングアルゴリズム

1° 次のようにネットワーク N を作る。

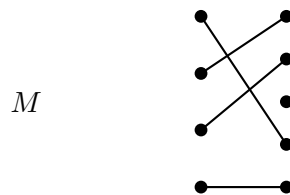
- G の各辺を、 V_1 から V_2 の方向へ向かう重み 1 の弧に置き換える
- 入口 v と出口 w を付加する
- v から V_1 の全ての頂点へ、 V_2 の全ての頂点から w へ、それぞれ重み 1 の弧を作る



2° N の最大フロー Φ を求める。



3° Φ から v, w を除去し無向化したグラフ M を出力する。

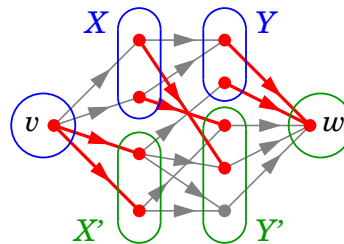


条件 (*) が成り立つときは、 N の最小カットの容量 (= 最大フロー Φ の値 = M の辺数) が $|V_1|$ に等しくなる。実際、 $K = (S, \bar{S})$ を任意のカットとし、

$$X = S \cap V_1, \quad Y = S \cap V_2, \quad X' = \bar{S} \cap V_1, \quad Y' = \bar{S} \cap V_2$$

とおくと K に属する弧は次の 3 種類：

- v から X' の頂点に至るもの
- X の頂点から Y' の頂点に至るもの
- Y の頂点から w に至るもの



N の作り方から (i) の弧は $|X'|$ 本、(iii) の弧は $|Y|$ 本。また (ii) の弧は最小でも $|\varphi(X) - Y|$ 本以上あり、

$$\begin{aligned}
K \text{ の容量} &\geq |X'| + |Y| + |\varphi(X) - Y| \\
&\geq |X'| + |Y| + |\varphi(X)| - |Y| \\
&\geq |X'| + |\varphi(X)| \geq |X'| + |X| = |V_1| \quad (\because (*))
\end{aligned}$$

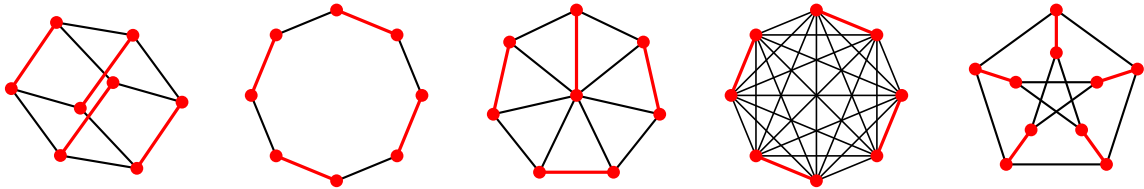
特に $S = \{v\}$ のときは K の容量 $= |V_1|$ となり、これが最小カットである。

3. 一般のグラフのマッチング

定義

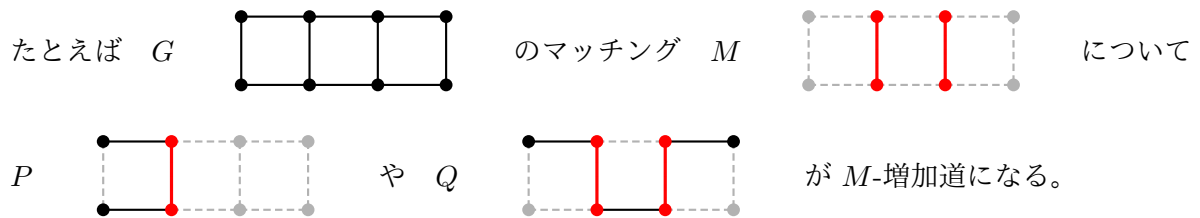
一般のグラフにおいては、全ての頂点を含むマッチングを「完全マッチング」と呼ぶ。

5つのプラトングラフ、 Q_k ($k \geq 2$), n が偶数のときの C_n, W_n, K_n , ペテルセングラフ等は完全マッチングを持つ。



定義

M を G のマッチングとする。(ゼロマッチングでもよい。) G 内の道 P が、 M の辺を交互に含み、始点と終点がどちらも M に属さないとき、 P を M -増加道と呼ぶ。



定理

P が M -増加道であれば、辺集合として

$$M' = P \oplus M = P \text{ XOR } M$$

とおくことにより、 M' は M が辺が1本多いマッチングとなる。



定理

M が最大マッチングであることと、 M -増加道が存在しないことは同値である。