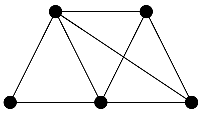
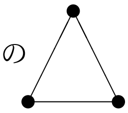
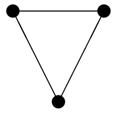
組合せとグラフの理論　（塩田）

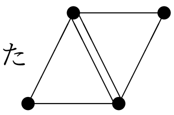
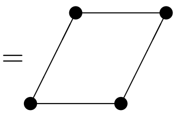
— グラフの閉路部分空間 —

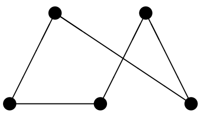
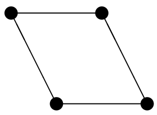
1. 演算 $\oplus$

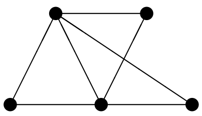
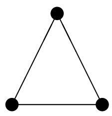
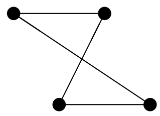
- グラフ G の辺の部分集合 C, D に対し、演算 $C \oplus D$ を集合の XOR（排他的論理和、片方にのみ含まれる辺の集合）で定義する：
$$C \oplus D = C \text{ XOR } D = (C \cup D) - (C \cap D)$$
- C, D が閉路 (の辺集合) ならば、$C \oplus D$ は辺を共有しない閉路いくつかに分けることができる。

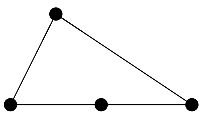
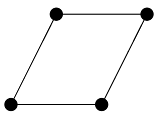
例　$G =$  において

- $C =$ 左の ，　$D =$  のとき

  C と D を重ねて描いた  から二重辺を消して　$C \oplus D =$ 

- $C =$ ，　$D =$  のときは

  $C \oplus D =$  $=$  $\oplus$ 

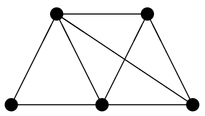
  $=$  $\oplus$ 

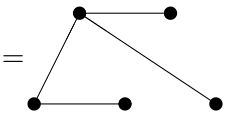
2. G の閉路部分空間 $W(G)$

- G 内の閉路から　$C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_s$　の形で得られる辺の部分集合たちを要素とする集合を $W(G)$ と表し「G の閉路部分空間」と呼ぶ。空集合 $\emptyset$ もその要素とする。
- $W(G)$ は 2 元体 $\mathbf{F}_2$ 上のベクトル空間になる。

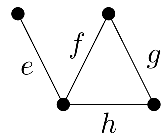
3. 基本閉路集合

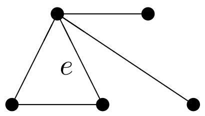
- G の全域木 T に、T に含まれない辺 e を付加すると閉路 C_e がひとつだけできる。そのようにして得られる閉路たちの集合 $\mathcal{F}(T)$ を「T に関連した基本閉路集合」と呼ぶ。
- $\mathcal{F}(T)$ は $W(G)$ の基底になる。

例　$G=$  の全域木として

$T=$ 

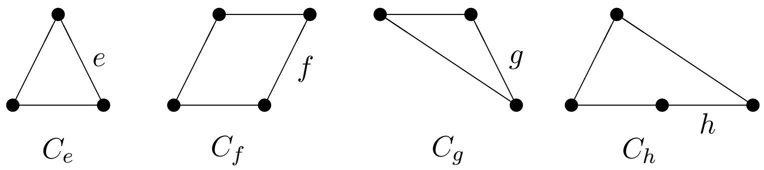
を取ったとき、T に含まれない辺は e, f, g, h の 4 本。



例えば e を T に付加すると 

のように閉路がひとつできる。

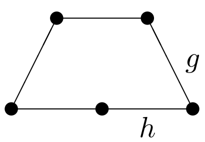
同様に考えると $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ の要素は次の 4 つ：



4. 閉路を基本閉路の $\oplus$ で書くアルゴリズム

1° T に含まれない C の辺を $e_1, e_2, \cdots$ とする。

2° $C_{e_1} \oplus C_{e_2} \oplus \cdots$ を出力

例　$C=$ 

のとき、T に含まれない C の辺は g, h の 2 本。

従って $C = C_g \oplus C_h$.

5. 電気回路への応用

起電力と抵抗から成る電気回路の電流を求める問題では、キルヒホフの法則に従って式を立てる：

(i) キルヒホフの第 1 法則

頂点では 「 電流の総和 $= 0$ 」 が成り立つ。

(ii) キルヒホフの第 2 法則

閉路では 「 (抵抗値 $\times$ 電流) の総和 $=$ 電圧の総和 」 が成り立つ。

このうち (ii) 式は基本閉路に対してのみ立てればよい。なぜなら、閉路たちが

$$D = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_s$$

の関係にあるとき、D についての (ii) 式は C_j たちについての (ii) 式から導かれるからである。