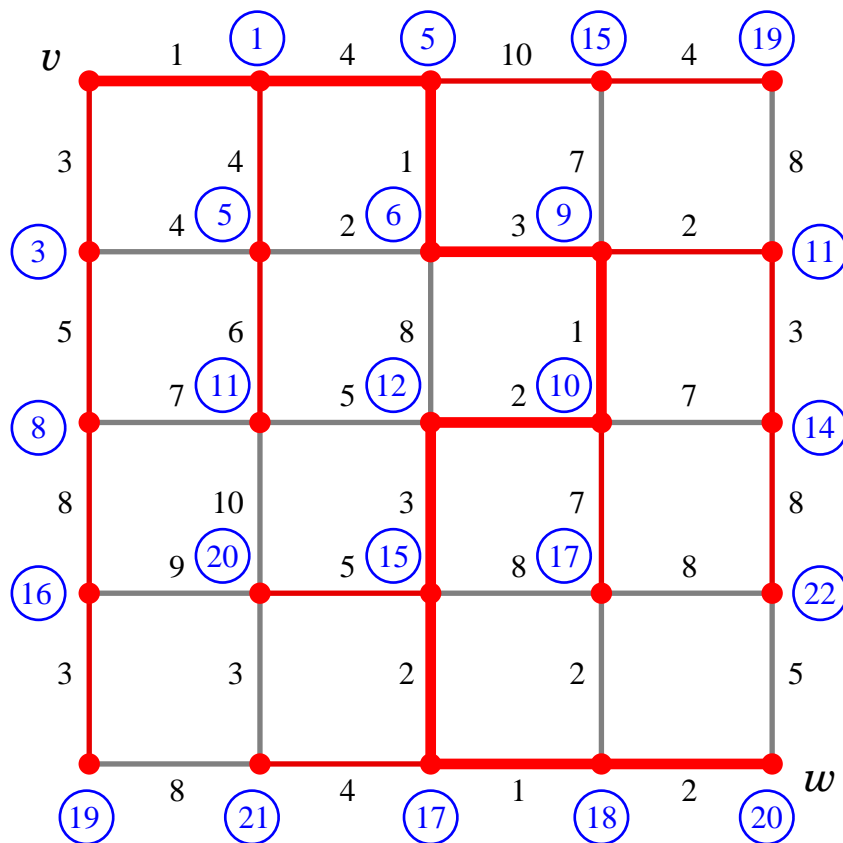


— 解答例 —

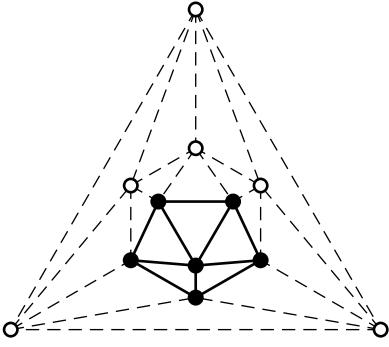
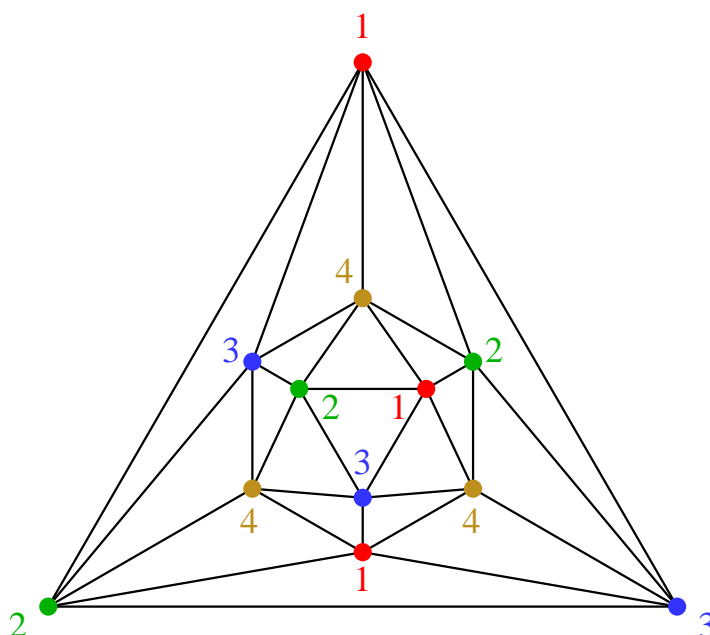
【1】 次の重み付きグラフにおいて v から w への最短路をわかりやすく図示せよ。



図の赤い全域木が v から各頂点への最短路を表し、特に太い道が w への最短路。(右上の頂点へはその下の頂点から辿っても良い。) また、青い数字は永久ラベルを表す。

【2】 正二十面体グラフの彩色数を、理由をつけて答えよ。

ヒント：
 正二十面体グラフは頂点数6の
 車輪グラフ W_6 を含む。

正二十面体グラフは W_6 を部分グラフとして含んでいて $\chi(W_6) = 4$ ゆえ、彩色数は4以上であり、実際に図のように4彩色可能であるので彩色数は4である。

(正二十面体グラフは平面的であるから、四色定理により彩色数は4以下、と主張しても可。)

【3】 次の条件をすべて満たすグラフ G を考える。

- (a) G は r -正則な単純無向グラフである。
- (b) G は連結な平面グラフである。
- (c) G の面は、外面(グラフの外側の領域)も含め、すべて三角形である。
- (d) G はオイラーグラフである。

G の頂点数、辺数、面の個数をそれぞれ n, m, f として、以下の間に答えよ。

(1) 条件 (a) から n, m, r の間に成り立つ式を答えよ。

握手補題より $2m = nr$.

(2) n, m, f の間に成り立つオイラーの公式を答えよ。

$$n - m + f = 2.$$

(3) 条件 (c) から m, f の間に成り立つ式を答えよ。

1本の辺は2つの面で使われ、すべての面は3本の辺で囲まれているので $2m = 3f$.

(4) (1), (2), (3) で求めた式から n, r の間に成り立つ式を答えよ。

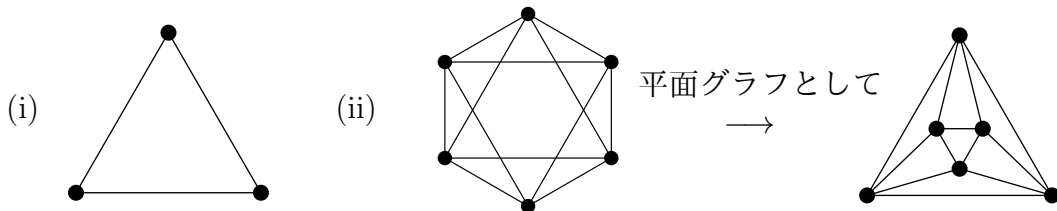
$$2 = n - m + f = n - m + \frac{2}{3}m = n - \frac{m}{3} = n - \frac{nr}{6}. \quad \therefore n(6 - r) = 12.$$

(5) 条件 (a), (b), (c), (d) をみたす G を全て求めよ。(答は名称でも図示でもよい。)

(d) より r は偶数であるから、(4) の式を満たす (n, r) の組は $(n, r) = (3, 2)$ または $(6, 4)$.

(i) $(n, r) = (3, 2)$ のときは $G = K_3$.

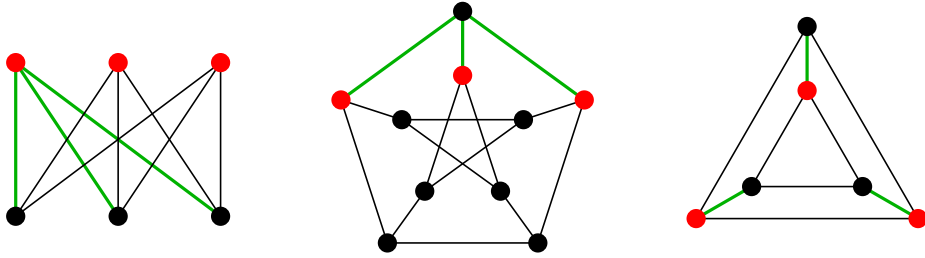
(ii) $(n, r) = (6, 4)$ のとき、 G は K_6 から隣接しない3辺を除去したグラフと同型、すなわち正八面体グラフを平面グラフとして描画したものになる。



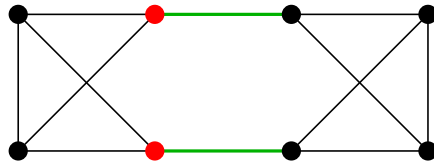
【4】 連結な 3-正則単純無向グラフで次の条件を満たすものをそれぞれひとつずつ答えよ。(答は名称でも図示でもよい。)

以下、赤い頂点たちが最小の分離集合、緑色の辺たちが最小のカットセット。

(1) 連結度も辺連結度も 3 である。



(2) 連結度も辺連結度も 2 である。



(3) 連結度も辺連結度も 1 である。

