

組合せとグラフの理論 (塩田)

— ネットワークフロー —

1. 最大フローを求めるアルゴリズム

状況設定

$D = (V, A)$: 有向グラフ

$N = (D, \Psi)$: ネットワーク (ただし $\Psi(a)$ ($a \in A$) は全て非負整数)

v : N の入口

w : N の出口

とするとき、 N の最大フロー φ を求めたい。

アイデア

今まで見つかったフロー φ と、まだ残っている容量を表すネットワーク $N' = (D, \Psi')$ を更新しながら N' の中で「増加道」 ε を探索してゆく。

アルゴリズム

Step 0 : φ, N' の初期値は

- $\varphi =$ そこそこのフロー
- $$\begin{cases} \Psi'(a) = \Psi(a) - \varphi(a) \\ \Psi'(a^{-1}) = \varphi(a) \end{cases} \quad (\forall a \in A)$$

ただし a^{-1} は a と逆方向の弧で、 a^{-1} が無いときは新たに作る。
(計算機にやらせるときは $\varphi =$ ゼロフロー, $N' = N$ とする。)

Step 1 : N' において v を根とする幅優先探索 (BFS) を実行して v - w 道 P を探索し、 P が見つからなければ φ を出力して終了。

Step 2 : P に属する弧 a の、 N' における容量 $\Psi'(a)$ のうち最小の値を P 全体に与えてフロー ε を作る。(ε を増加道と呼ぶ。)

Step 3 : φ を次のように更新する :

$$(\text{新 } \varphi) = (\text{旧 } \varphi) + \varepsilon$$

Step 4 : N' を次のように更新する :

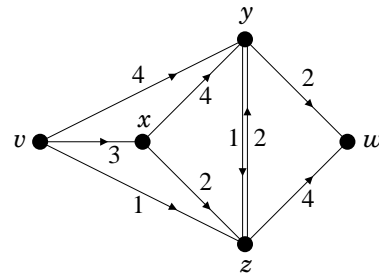
$$\begin{cases} \Psi'(a) = \Psi'(a) - \varepsilon(a) \\ \Psi'(a^{-1}) = \Psi'(a^{-1}) + \varepsilon(a) \end{cases} \quad (\forall a \in A)$$

Step 5 : **Step 1** に戻る。

2. プログラムの動作

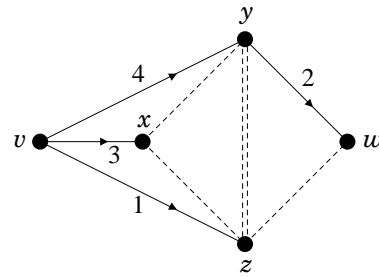
$$\left\{ \begin{array}{l} N = (D, \Psi) : \text{右図のネットワーク} \\ v \quad : \text{入口} \\ w \quad : \text{出口} \end{array} \right.$$

として N の最大フロー φ を求める。



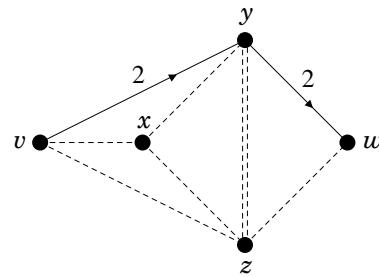
Step 1

N' (= 初期値 N) において v を根とする幅優先探索 (BFS) を実行し、 w に到達した時点で中断する。



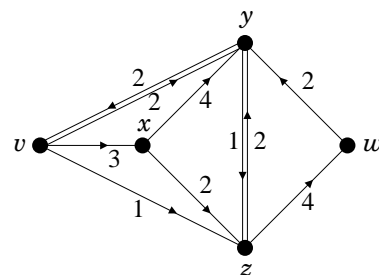
Step 2,3

増加道 ε (= 現在の φ) は右図のとおり



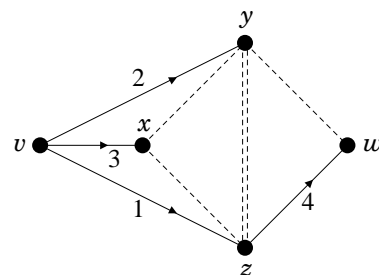
Step 4

N' は右図のとおり



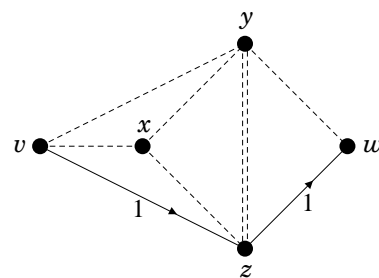
Step 1

N' で BFS を実行する。



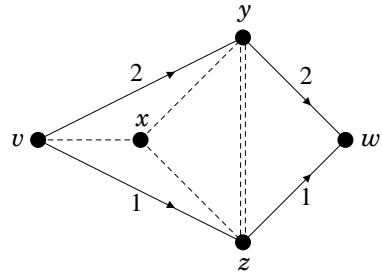
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



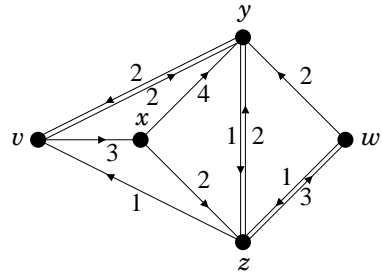
Step 3

新 φ (= 旧 φ + 増加道 ε) は右図のとおり。



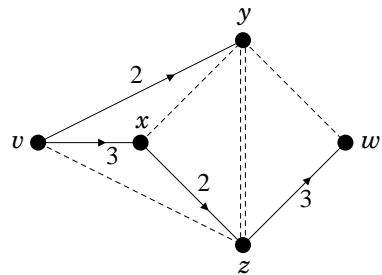
Step 4

N' は右図のとおり。



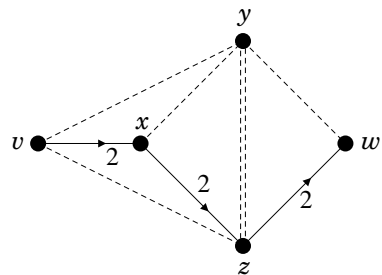
Step 1

N' で BFS を実行する。



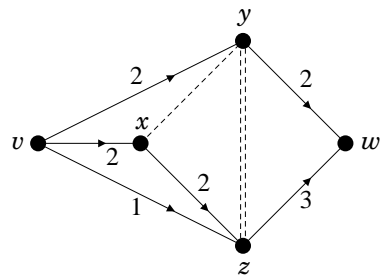
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



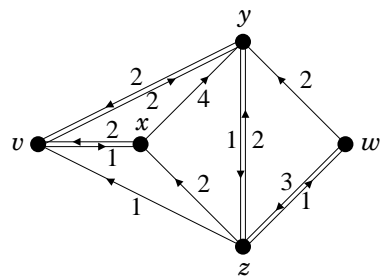
Step 3*

新 φ (= 旧 φ + 増加道 ε) は右図のとおり。



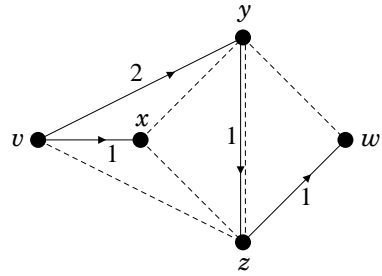
Step 4

N' は右図のとおり。



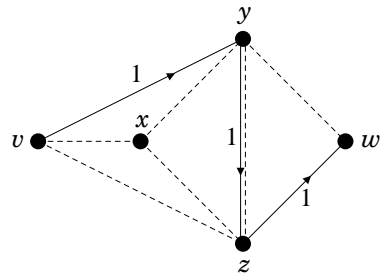
Step 1

N' で BFS を実行する。



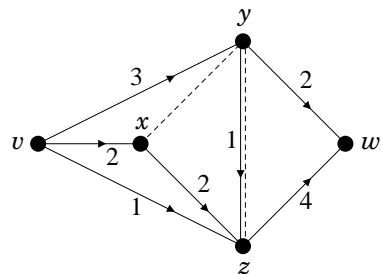
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



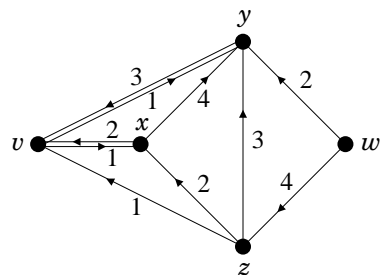
Step 3

新 φ (= 旧 φ + 増加道 ε) は右図のとおり。



Step 4

N' は右図のとおり。

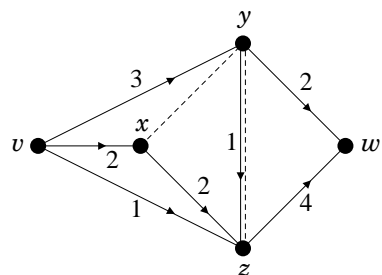


Step 1

(N' では w の入次数 = 0 となっているので) BFS を実行しても増加道はみつからず、ここで終了。

答え

最大フロー φ は右図のとおりで、
最大フローの値 = 6.



3. 手計算で実行するとき

p.3 Step 3* の φ くらいまではすぐ見つかるのでそこから始めれば良く、絵は φ と N' を描いて数字だけ更新してゆけば良い。