組合せとグラフの理論　（塩田）　　2021 年度 学期末レポート

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

【1】 次の行列はいずれも頂点数 6 の単純無向グラフの隣接行列である。それぞれどのグラフの隣接行列であるか、下記の選択肢から選んで答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1\\ 1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$

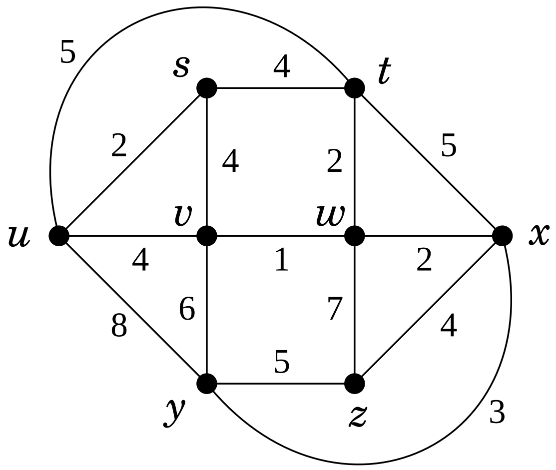
(4) $\begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&0 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&0&0&1\\ 1&1&0&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&1\\ 1&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 0&1&1&0&1&1\\ 1&0&1&1&0&1\\ 1&1&0&1&1&0\\ 0&1&1&0&1&1\\ 1&0&1&1&0&1\\ 1&1&0&1&1&0 \end{pmatrix}$

選択肢：　C_6,　K_6,　N_6,　P_6,　Q_6,　W_6,　正八面体グラフ Oct,
$K_{1,5}$,　$K_{2,4}$,　$K_{3,3}$,　$K_2 \cup K_4$,　$K_3 \cup K_3$

(1)		(2)		(3)	
(4)		(5)		(6)	
(7)		(8)		(9)	

【2】 次の重み付きグラフにおいて、s を出発点とする郵便配達員問題の解をひとつ示せ。計算の過程も、概略で良いので、適切に示すこと。

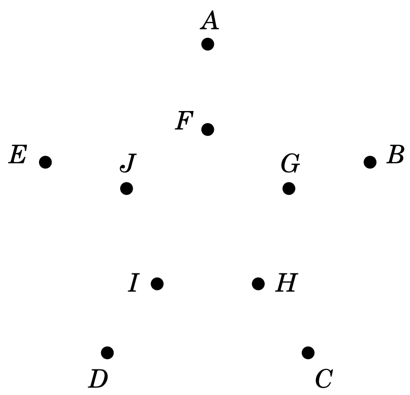


【3】 次の文章を読んで以下の問いに答えよ。

道の駅で A, B, ⋯, J の 10 種類の魚を展示しようとしている。この魚たちの組合せのうち、右の表で × のあるものは、捕食関係などから一緒の水槽に入れることができない。最小限でいくつの水槽を用いれば展示が可能かを考えよう。

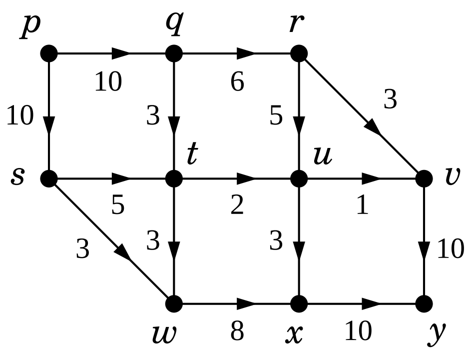
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		×			×	×				
B	×		×				×			
C		×		×				×		
D			×		×				×	
E	×			×						×
F	×							×	×	
G		×							×	×
H			×			×				×
I				×		×	×			
J					×		×	×		

(1) 一緒の水槽に入れてはいけない魚の組合せ (u, v) 全てに対し、辺 uv を次の図に記入せよ。



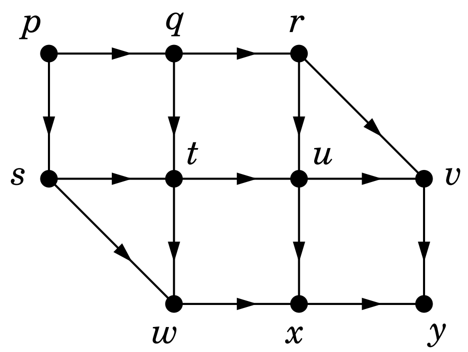
(2) 展示に必要な水槽の個数の最小値はいくつか。必要最小限である理由と共に答えよ。

【4】 p を入口、y を出口とする次のネットワーク N



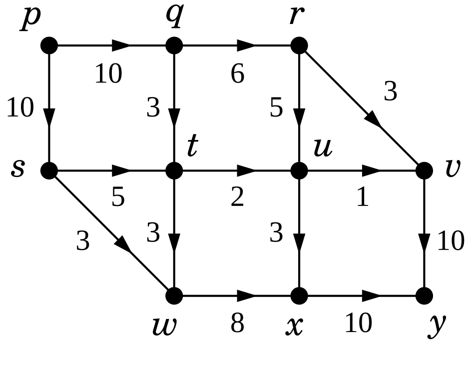
について、N の最大フロー φ, φ の値、最小カット $K = (S, \overline{S})$ を答えよ。

最大フロー φ



最大フロー φ の値 $=$

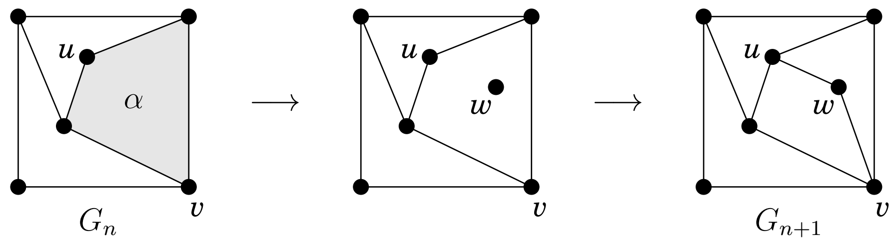
最小カット $K = (S, \overline{S})$



【5】 頂点数 4 以上の連結単純平面二部グラフの頂点数 n と辺数 m の間には、不等式 $m \leqq 2n-4$ が成り立つ。その等号 $m = 2n-4$ は (外面を含め) 全ての面が四角形であるときにのみ成立するが、$K_{2,n-2}$ はその一例であり、また、次のアルゴリズムによってもそのような連結単純平面二部グラフ G_n を再帰的に構成することができる。

1° $n = 4$ のときは $G_4 = C_4$.

2° $n \geqq 4$ のとき、G_n の面 α と、α の対頂点 u, v をランダムに選んで、α 内に頂点 w と 2 辺 uw, vw を 付加したグラフを G_{n+1} とする。



同様に、頂点数 3 以上の連結単純平面グラフの頂点数 n と辺数 m の間には、不等式 $m \leqq 3n-6$ が成り立ち、その等号は (外面を含め) 全ての面が三角形であるときにのみ成立する。そこで $m = 3n-6$ を満たす頂点数 n の連結単純平面グラフ H_n を実際に構成したい。

(1) H_4, H_5 をそれぞれひとつ図示せよ。

H_4

H_5

(2) 一般に H_n を構成する方法を述べよ。