組合せとグラフの理論　（塩田）

— マッチング —

1　二部グラフのマッチング

問 1　m 人の女性と n 人の男性がいて、それぞれに知り合い関係があるとする。全ての女性が知り合いの男性と結婚することができるか？

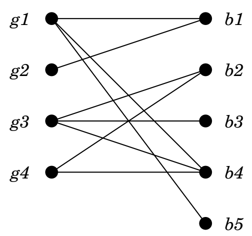
問 2　m 人の求人に対し n 人の応募者がいて、それぞれに適性があるとする。全ての求人に対し適性のある者を雇うことができるか？

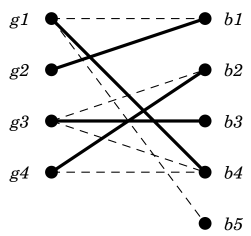
例 1

女性	知り合いの男性
g_1	b_1, b_4, b_5
g_2	b_1
g_3	b_2, b_3, b_4
g_4	b_2, b_4

職	適性のある応募者
求人 1	応募者 1, 応募者 4, 応募者 5
求人 2	応募者 1
求人 3	応募者 2, 応募者 3, 応募者 4
求人 4	応募者 2, 応募者 4

という状況は共に次の二部グラフで表現でき、右図のような解がある。





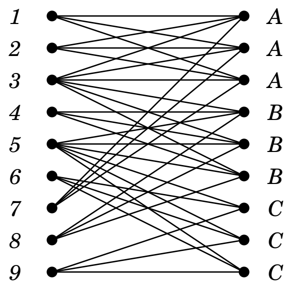
定義 二部グラフ $G = G(V_1, V_2)$ において、V_1 を含む次数 1 の正則部分グラフを「V_1 から V_2 への完全マッチング」という。

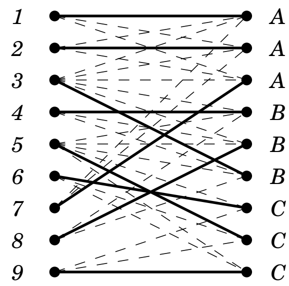
問 1, **問 2** に解があるということは、V_1 から V_2 への完全マッチングが存在すること、と言い換えられる。

例 2　研究室配属の希望が次表のとおりで、各研究室の定員が 3 であるとする。

学生	希望研究室
学生 1	A 研究室
学生 2	A 研究室
学生 3	A 研究室 または B 研究室
学生 4	B 研究室
学生 5	B 研究室 または C 研究室
学生 6	C 研究室
学生 7	A 研究室
学生 8	B 研究室
学生 9	C 研究室

このとき、研究室をそれぞれ定員の個数の頂点として二部グラフに表現する。すると、右図のマッチングにより全員を希望の研究室に配属することができる。





2　一般のグラフのマッチング

問 3　m 人の刑事を気の合うペアに分けたい。最大何組のペアを作ることができるか？

定義
- グラフ G において、次数 1 の正則部分グラフを「マッチング」という。
- マッチングの中で辺数が最大となるものを「最大マッチング」という。
- 全ての頂点を含むマッチングが存在するとき、それを「完全マッチング」という。

問 3 は、最大マッチングを求める問題として捉えられる。

例 3　7 人の刑事の「気の合う関係」が次の表のとおりであるとする。

刑事	気の合う相手
刑事 0	刑事 1, 刑事 2, 刑事 5, 刑事 6
刑事 1	刑事 0, 刑事 3, 刑事 5
刑事 2	刑事 0, 刑事 6
刑事 3	刑事 1
刑事 4	刑事 5, 刑事 6
刑事 5	刑事 0, 刑事 1, 刑事 4
刑事 6	刑事 0, 刑事 2, 刑事 4

このとき、気の合う関係をグラフに表現すると下図のようになり、右図のマッチングにより 3 組の気の合うペアができる。