

組合せとグラフの理論 (塩田)

— グラフの閉路空間 —

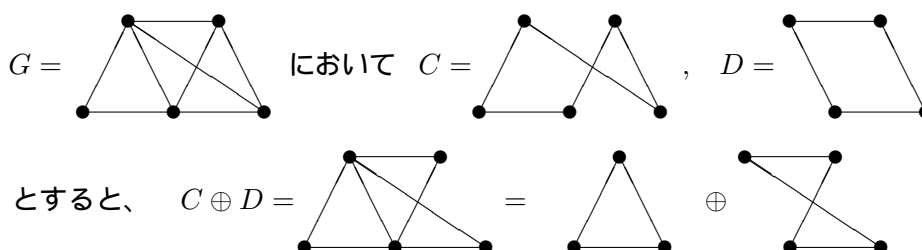
1. 演算 \oplus

- グラフ G の辺の部分集合 C, D に対し、演算 $C \oplus D$ を集合の XOR (排他的論理和、片方にのみ含まれる辺の集合) で定義する:

$$C \oplus D = C \text{ XOR } D = (C \cup D) - (C \cap D)$$

- C, D が閉路 (の辺集合) ならば、 $C \oplus D$ は辺を共有しない閉路いくつかに分けることができる。

例



2. G の閉路空間 $W(G)$

- G 内の閉路から $C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_s$ の形で得られる辺の部分集合たちを要素とする集合を $W(G)$ と表し、 G の閉路空間と呼ぶ。(空集合 \emptyset も要素に入れる。)
- 演算 \oplus は $W(G)$ に加法を定める。
- \emptyset がゼロ (加法単位元) になる。
- $W(G)$ の要素を 2 倍するとゼロ \emptyset になる。つまり $W(G)$ は 2 元体 \mathbb{F}_2 上のベクトル空間になる。

* $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$: 2 つしか数のない、一番シンプルな体
($2 = 0, -1 = 1$ の約束のもとで計算する。)

3. 線形代数のツボ

- 体: 加減乗除の四則演算ができる数の集合 (数、と呼ぶに相応しい。)
- 体 F 上のベクトル: 和と、 F の数によるスカラー倍が定義されているもの
- この簡単な約束ごとから、
 - 次元 d が決まって d 本の座標軸が入る。
 - F -成分の d -次元数ベクトルと同じ構造をもつ。
 - 行列計算で処理できる。

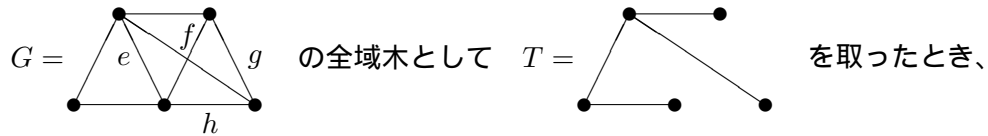
..... 等々いいことがいっぱい!!

- たとえば、 \mathbb{F}_2 上の d -次元ベクトル空間では 2^d 個ものベクトルがわずか d 個の基底ベクトルで統制できる。

4. 基本閉路系

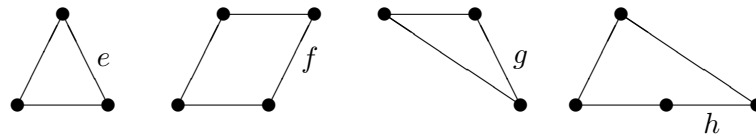
- G の全域木 T に、 T に含まれない辺を付加すると閉路がひとつだけできる。そのようにしてできる閉路たちを T に関連した基本閉路系と呼ぶ。

例



T に含まれない辺は e, f, g, h の 4 本。

$\Rightarrow T$ に関連した基本閉路系 \mathcal{F} は



5. 定理

- \mathcal{F} は $W(G)$ の基底になる。
- つまり G 内の閉路は全て基本閉路から \oplus で作れる。
- G のオーダー (頂点数)、サイズ (辺数) をそれぞれ n, m とすると

$$\dim W(G) = \text{基本閉路の個数} = m - n + 1$$

6. 電気回路への応用

電気回路の各導線の電流を求めるにはキルヒホフの法則を用いる：

(i) キルヒホフの第 1 法則

頂点では 電流の総和 = 0 が成り立つ。

(ii) キルヒホフの第 2 法則

閉路では (抵抗値 \times 電流) の総和 = 電圧の総和 が成り立つ。

(i) 式はひとつの頂点を除く全ての頂点に対して立て、(ii) 式は 基本閉路のみ に対して立てて、連立一次方程式を解けばよい。..... 除外した 1 点についての (i) 式や、他の閉路についての (ii) 式は自動的に成り立つ。