組合せとグラフの理論　(塩田)

— 最大フロー・最小カット定理、Menger の定理 —

1. 最大フロー・最小カット定理

状況設定

$D = (V, A)$: 有向グラフ

$N = (D, \Psi)$: D 上のネットワーク

v : N の入口、　w : N の出口

定義　A の部分集合 B が「N のカットである」とは、任意の v-w 道が B の弧を含むこと。N のカットのうち、容量　$\Psi(B) = \sum_{b \in B} \Psi(b)$　が最小となるものを「最小カット」と呼ぶ。

最大フロー・最小カット定理　ネットワーク N において、

$$(\text{最大フロー } \varphi \text{ の値}) = (\text{最小カット } B \text{ の容量})$$

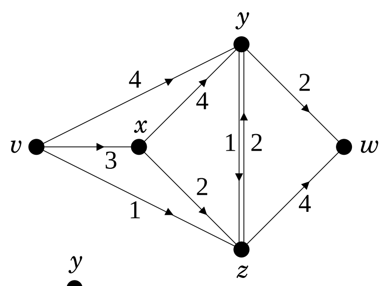
系　ネットワーク N において、

$$(\text{フロー } \varphi \text{ の値}) = (\text{カット } B \text{ の容量})$$

を満たす φ と B が見つけられれば、φ は最大フロー、B は最小カットになる。

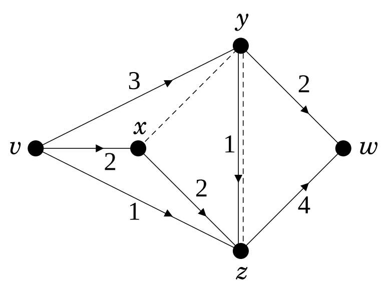
例

ネットワーク

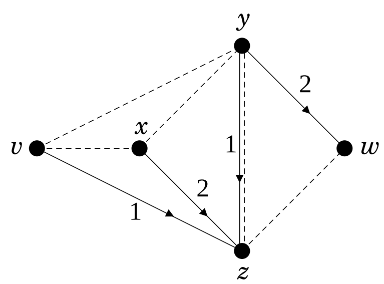


において

φ :



B :



とすると、(フロー φ の値) = (カット B の容量) = 6 が成り立つので、φ は最大フローである。

2. Menger の定理

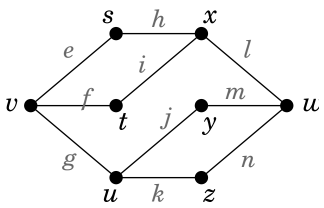
問　連結無向グラフ $G = (V, E)$ の 2 頂点 v, w に対して

(1) 辺素な（辺を共有しない）v-w 道は最大で何本あるか？

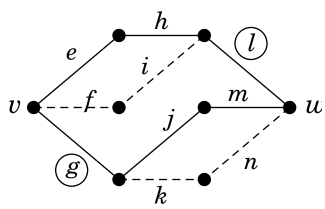
(2) 点素な（中間点を共有しない）v-w 道は最大で何本あるか？

(3) 有向グラフの場合はどうか？

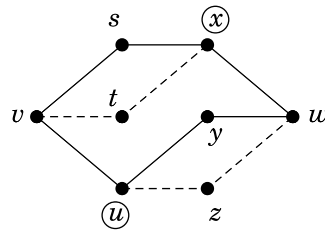
例　次のグラフでは



(1) の答え： 2 本



(2) の答え： 2 本



定義

- $F \subseteq E$ が vw-非連結化集合であるとは、任意の v-w 道が F のいずれかの辺を通ること。（ $\Leftrightarrow$ $G - F$ で v と w が異なる連結成分に入ること。）
- $W \subseteq V$ が vw-分離集合であるとは、任意の v-w 道が W のいずれかの点を中間点として通ること。（ $\Leftrightarrow$ $G - W$ で v と w が異なる連結成分に入ること。）

辺形の Menger の定理（1955 年、Ford & Fulkerson）

(1) の答え $=$ vw-非連結化集合の辺数の最小値（ 例の $\{g, \ell\}$ ）

Menger の定理（1927 年、Menger）

(2) の答え $=$ vw-分離集合の頂点数の最小値（ 例の $\{u, x\}$ ）

整数性定理

「辺形の Menger の定理」は有向グラフでも成り立つ。

これらの定理は最大フロー・最小カット定理を応用して証明される。