

# 組合せとグラフの理論 (塩田)

## — オイラーグラフ、ハミルトングラフ —

### 1. 完全グラフのオイラーサイクル

$n$  が 3 以上の素数ならば完全グラフ  $K_n$  のオイラーサイクルをひとつ簡単に構成できる。頂点を正  $n$  角形に配置して描いておいて、

- 適当な点  $v_0$  から出発し、
- 始めは外周をひとまわり、
- 次はひとつ飛びにひとまわり、
- 次はふたつ飛びにひとまわり …

とすればよい。(証明してごらん。)

### 2. 順列の半ハミルトン道

例 4 次の順列を、2 文字ずつ異なるもの同志でつなぐと次のような半ハミルトン道がみつかる：

1234 → 1243 → 1342 → 1324 → 1423 → 1432  
→ 2431 → 2413 → 2314 → 2341 → 2143 → 2134  
→ 3124 → 3142 → 3241 → 3214 → 3412 → 3421  
→ 4321 → 4312 → 4213 → 4231 → 4132 → 4123

- 全ての順列について調べる必要があるようなプログラムを書くときに、この半ハミルトン道を用いると代入文が節約できる：

x[1]=a; x[2]=b; x[3]=c; x[4]=d;  
x[3]=d; x[4]=c;  
x[2]=c; x[4]=b;  
x[3]=b; x[4]=d;  
x[2]=d; x[4]=c;  
x[3]=c; x[4]=b; ...

- これは任意の長さの順列で可能。

### 3. オイラー有向グラフの応用：ドゥブリエイン列

例 *aaababbbaa*

という記号列の中には「 $a$  と  $b$  から作れる 3 文字単語」が全て含まれている。例えば *abb* は *aaababbbaa* のように。

定義 このように

- シンボル  $1, 2, \dots, m$  を用いた、長さ  $m^n + (n - 1)$  の文字列で、
- シンボル  $1, 2, \dots, m$  から作れる  $n$  文字単語を全て含むものをドゥブリュエイン列 ( de Bruijn sequence ) と呼ぶ。

- 注
- ドゥブリュエイン列はリセット不要な番号錠の解読に使える。( 総当たりと比較して  $1/n$  の時間でできる。 )
  - ドゥブリュエイン列は乱数生成にも有用。

### ドゥブリュエイン列の作り方

1. 次のようなオイラー有向グラフ  $D = (V, A)$  を構成する :

- $(n - 1)$  文字単語すべての集合  $V$  を頂点集合とする。
- $v, w \in V$  について

$v$  の後ろ  $(n - 2)$  文字 =  $w$  の前  $(n - 2)$  文字  
が成り立つときに弧  $vw$  を描く。

2.  $D$  のオイラーサイクル

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v_0$$

を求める。

3. すると、 $v_0(v_1$ の末尾の文字) $(v_2$ の末尾の文字) $\dots$  がドゥブリュエイン列になる。

### $m = 2, n = 3$ の例

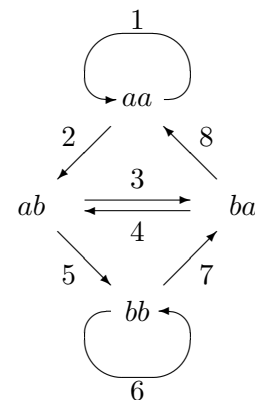
$V = \{aa, ab, ba, bb\}$  で、有向グラフ  $D$  は右の通り:

$D$  のオイラーサイクルとして

$$aa \rightarrow aa \rightarrow ab \rightarrow ba \rightarrow ab \rightarrow bb \rightarrow bb \rightarrow ba \rightarrow aa$$

が見つかるので、ドゥブリュエイン列は

$$aa, a, b, a, b, b, a, a$$



### $m = 5, n = 3$ の例

0001002003004011012013014021022023024031032033034041042043044111  
211311412212312413213313414214314422232242332342432443334244400