組合せとグラフの理論　(塩田)

— ネットワークフロー、Menger の定理 —

1　最大フローを求めるアルゴリズム

状況設定

$$\begin{cases} D=(V,A):\ \text{有向グラフ} \\ N=(D,\Psi):\ D\ \text{上のネットワーク} \\ \qquad (\ \text{ただし弧}\ a\in A\ \text{の容量}\ \Psi(a)\ \text{は全て非負整数}\ ) \\ v:\ N\ \text{の入口} \\ w:\ N\ \text{の出口} \end{cases}$$

とするとき、N の最大フロー φ を求めたい。

アイデア　今まで見つかっているフロー φ と、まだ残っている容量を表すネットワーク $N'=(D,\Psi')$ を更新しながら N' の中で「増加道」を探索してゆく。

アルゴリズム

Step 0： φ, N' の初期値は

- $\varphi =$ そこそこのフロー
- $\begin{cases} \Psi'(a)=\Psi(a)-\varphi(a) \\ \Psi'(a^{-1})=\varphi(a) \end{cases} \qquad (\ \forall a\in A\ )$

ただし a^{-1} は a と逆方向の弧で、a^{-1} が無いときは新たに作る。
(計算機にやらせるときは　$\varphi =$ ゼロフロー,　$N'=N$ とする。)

Step 1： N' において v を根とする幅優先探索 (BFS) を実行して v-w 道 P を探索し、P が見つからなければ終了。

Step 2： P に属する弧 a の、N' における容量 $\Psi'(a)$ のうち最小の値を P 全体に与えてフロー ε を作る。(ε を増加道と呼ぶ。)

Step 3： φ を次のように更新する：

(新 φ) $=$ (旧 φ) $+\,\varepsilon$

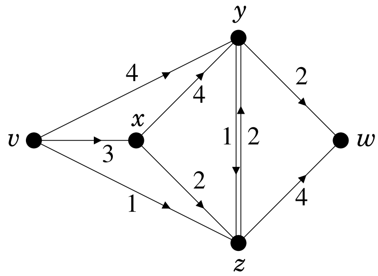
Step 4： N' を次のように更新する：

$$\begin{cases} \Psi'(a)=\Psi'(a)-\varepsilon(a) \\ \Psi'(a^{-1})=\Psi'(a^{-1})+\varepsilon(a) \end{cases} \qquad (\ \forall a\in A\ )$$

Step 5： **Step 1** に戻る。

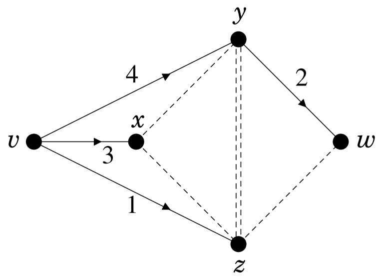
実行例

$N = (D, \Psi)$ を右図のネットワークとして、N の最大フロー φ を求める。



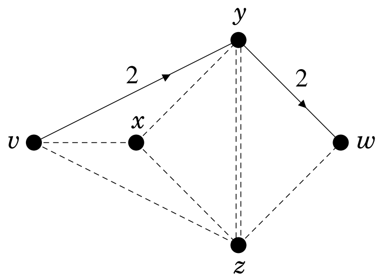
Step 1

N' (最初は $= N$) において v を根とする幅優先探索 (BFS) を実行し、w に到達した時点で中断する。



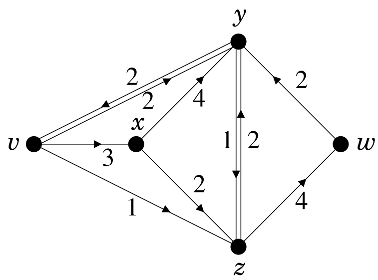
Step 2,3

増加道 ε ($=$ 現在の φ) は右図のとおり



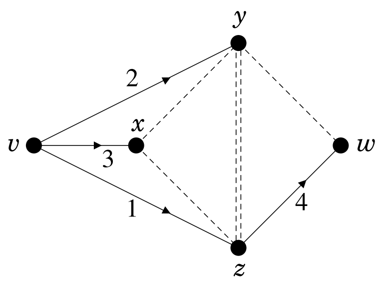
Step 4

N' は右図のとおり



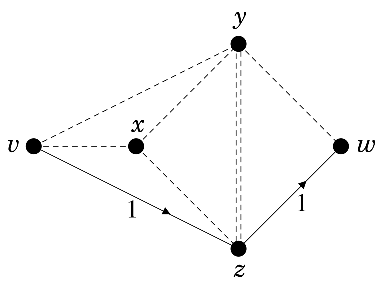
Step 1

N' で BFS を実行する。



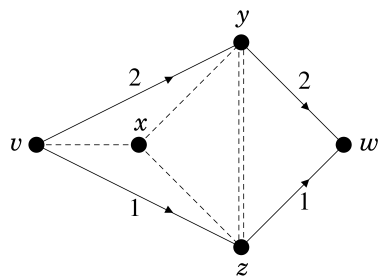
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



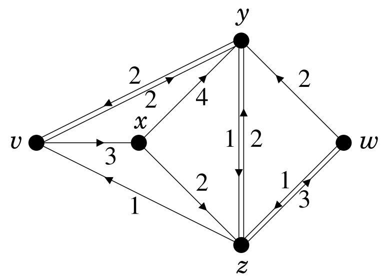
Step 3

新 φ ($=$ 旧 $\varphi +$ 増加道 ε) は右図のとおり。



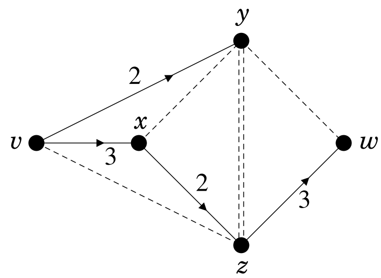
Step 4

N' は右図のとおり。



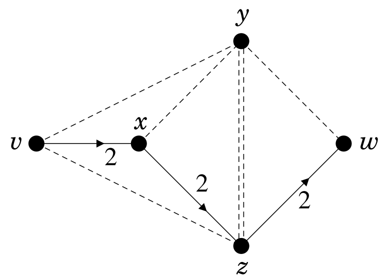
Step 1

N' で BFS を実行する。



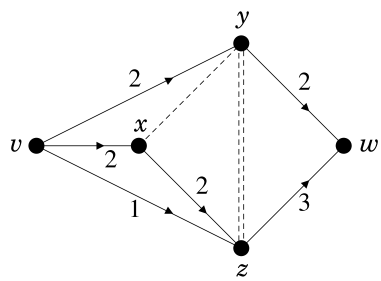
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



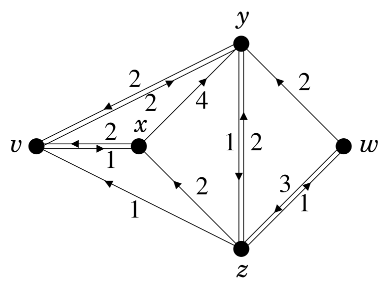
Step 3*

新 φ ($=$ 旧 $\varphi +$ 増加道 ε) は右図のとおり。



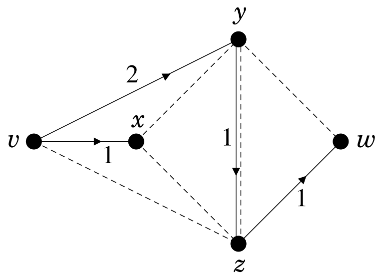
Step 4

N' は右図のとおり。



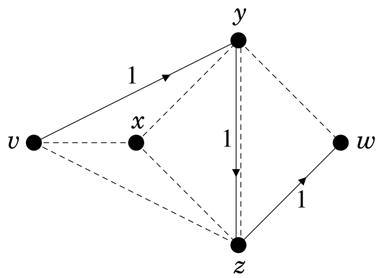
Step 1

N' で BFS を実行する。



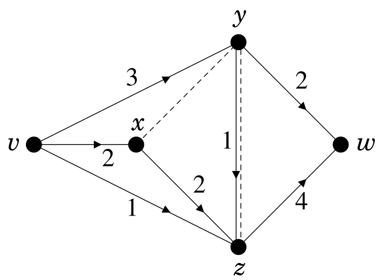
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



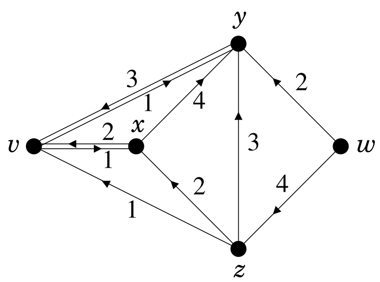
Step 3

新 φ ($=$ 旧 $\varphi +$ 増加道 ε) は右図のとおり。



Step 4

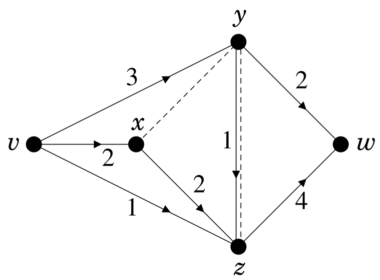
N' は右図のとおり。



Step 1

(N' では w の入次数 $= 0$ となっているので) BFS を実行しても増加道はみつからず、ここで終了。

答え



最大フロー φ は右図のとおりで、
最大フローの値 $= 6$.

※　手計算で実行するときは、p.3 **Step 3*** の φ くらいまではすぐ見つかるのでそこから始めれば良く、絵は φ と N' を描いて数字だけ更新してゆけば良い。

2　最大フロー・最小カット定理

状況設定　有向グラフ $D=(V,A)$, D 上のネットワーク $N=(D,\Psi)$ と、N の入口 v, N の出口 w は先のとおり。φ を N のフローとする。

定義　弧集合 A の部分集合 B が「N のカットである」とは、任意の v-w 道が B の弧を含むこと。N のカットのうち、容量

$$\Psi(B)=\sum_{b\in B}\Psi(b)$$

が最小となるものを「最小カット」と呼ぶ。

最大フロー・最小カット定理　ネットワーク N において、最大フローの値は、最小カットの容量と等しい。

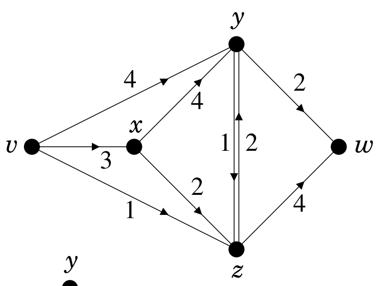
系　ネットワーク N において、

$$(\text{ フロー } \varphi \text{ の値 }) = (\text{ カット } B \text{ の容量 })$$

を満たす φ と B が見つけられれば、φ は最大フロー、B は最小カットになる。

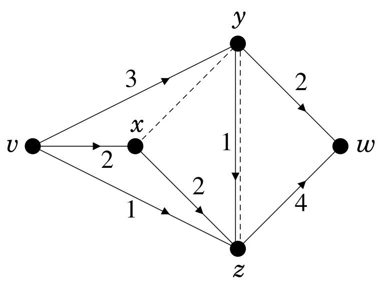
例

ネットワーク

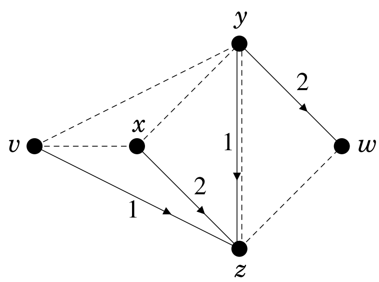


において

φ :



B :



とすると、(フロー φ の値) = (カット B の容量) = 6 が成り立つので、φ は最大フローである。

3　Menger の定理

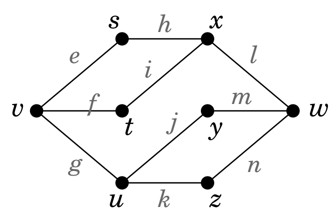
問　連結無向グラフ $G = (V, E)$ の 2 頂点 v, w に対して

(1) 辺素な（辺を共有しない）v-w 道は最大で何本あるか？

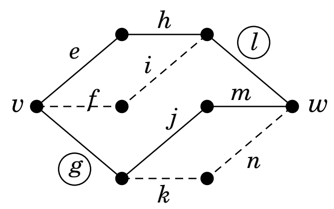
(2) 点素な（中間点を共有しない）v-w 道は最大で何本あるか？

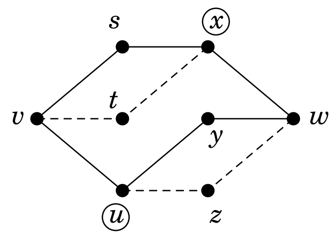
(3) 有向グラフの場合はどうか？

例　次のグラフでは



(1) の答え： 2 本　　　　(2) の答え： 2 本





定義
- $F \subseteq E$ が vw-非連結化集合であるとは、任意の v-w 道が F のいずれかの辺を通ること。（ $\Leftrightarrow G - F$ で v と w が異なる連結成分に入ること。）
- $W \subseteq V$ が vw-分離集合であるとは、任意の v-w 道が W のいずれかの点を中間点として通ること。（ $\Leftrightarrow G - W$ で v と w が異なる連結成分に入ること。）

辺形の Menger の定理（1955 年、Ford & Fulkerson）

(1) の答え $=$ vw-非連結化集合の辺数の最小値（ 例の $\{g, \ell\}$ ）

Menger の定理（1927 年、Menger）

(2) の答え $=$ vw-分離集合の頂点数の最小値（ 例の $\{u, x\}$ ）

整数性定理

「辺形の Menger の定理」は有向グラフでも成り立つ。