組合せとグラフの理論 （塩田）

— 彩色多項式 —

1. 彩色多項式

定義　グラフ G を x 色で点彩色する場合の数を $P_G(x)$ と表すと、$P_G(x)$ は x の多項式になる。これを「G の彩色多項式」と呼ぶ。

定理　G の勝手な辺 e を取り、$H = G - e$（除去）、$K = G \backslash e$（縮約）と置くとき、$P_G = P_H - P_K$ が成り立つ。

彩色数を求めるアルゴリズム

1° 上の定理を用いた再帰的プログラムで $P_G(x)$ を計算する。

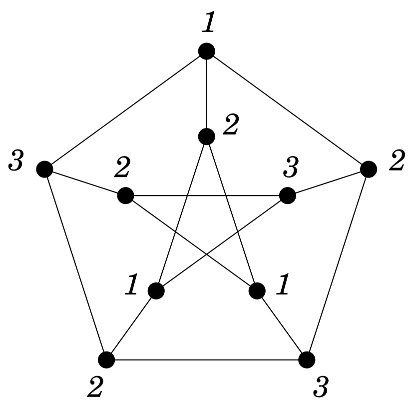
2° $P_G(x)$ の一次因子を $x, x-1, \cdots$ の順に括り出してゆく。

3° 始めて割り切れなくなった一次因子を $x-k$ とすると、k が彩色数。

例：ピータースングラフの場合

```
Graph :

 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0
 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0
 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0
 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1
 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0
 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1
 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1
 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0
 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0
```



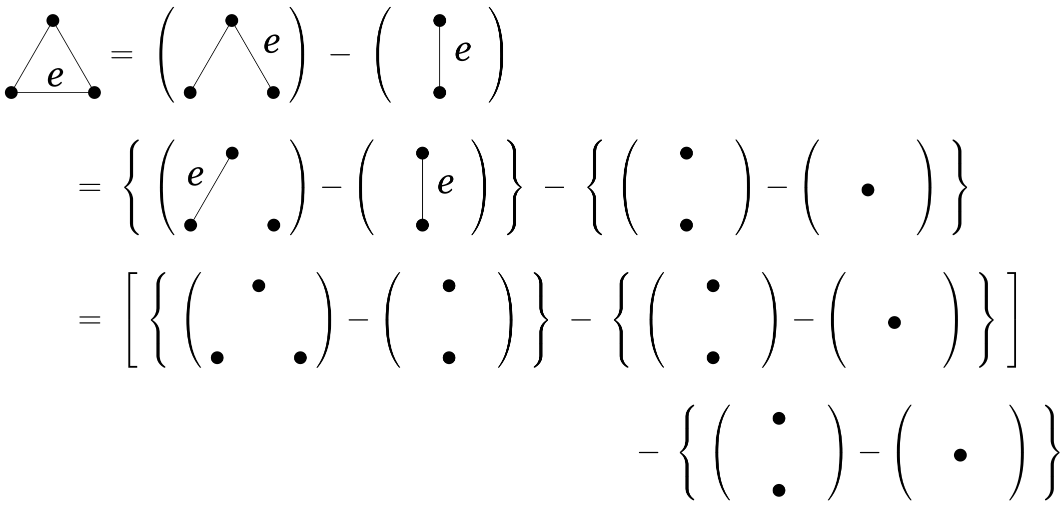

```
彩色多項式 :
X^10 - 15 X^9 + 105 X^8 - 455 X^7 + 1353 X^6 - 2861 X^5
+ 4275 X^4 - 4305 X^3 +2606 X^2 - 704 X

一次因子抽出 :
X (X - 1) (X - 2) (X^7 - 12 X^6 + 67 X^5 - 230 X^4
+ 529 X^3 - 814 X^2 + 775 X - 352)

彩色数 = 3
```

2. 再帰的プログラムの動作（ K_3 の場合）

教科書 pp.140-141 にならって、P_G の代わりにグラフの絵で彩色多項式を表すことにすると



$$
\begin{aligned}
&= [\{x^3 - x^2\} - \{x^2 - x\}] - \{x^2 - x\} \\
&= x^3 - 3x^2 + 2x \\
&= x(x-1)(x-2)
\end{aligned}
$$

※　手計算では K_n, N_n, 木, グラフの和等の場合の公式を使えるのでここまで細かくやる必要は無い。（教科書 p.141 の例では木や K_n の公式が使えるところまでで変形を終えている。）

3. 彩色多項式の例

定理　G のオーダー、サイズを n, m とすると　$P_G(x) = x^n - mx^{n-1} + \cdots$. 係数の符号は上から交互に $+, -, +, -, \cdots$ となり、最低次の次数は G の連結成分の個数に等しい。

グラフ	n	m	彩色多項式
C_5	5	5	$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 4x$
W_6	6	10	$x^6 - 10x^5 + 40x^4 - 80x^3 + 79x^2 - 30x$
立方体グラフ	8	12	$x^8 - 12x^7 + 66x^6 - 214x^5 + 441x^4 - 572x^3 + 423x^2 - 133x$
$K_2 \cup K_3$	5	4	$x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2$