

組合せとグラフの理論 (塩田)

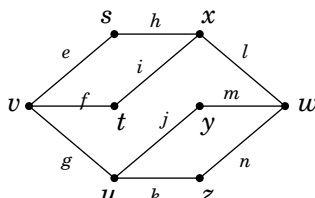
— Menger の定理、最大フロー —

1 Menger の定理

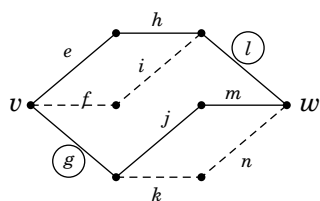
問 連結無向グラフ $G = (V, E)$ の 2 頂点 v, w に対して

- (1) 辺素な (辺を共有しない) v - w 道は最大で何本あるか?
- (2) 点素な (中間点を共有しない) v - w 道は最大で何本あるか?
- (3) 有向グラフの場合はどうか?

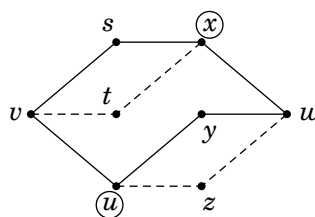
例 次のグラフでは



(1) の答え : 2 本



(2) の答え : 2 本



- 定義
- $F \subseteq E$ が vw -非連結化集合であるとは、任意の v - w 道が F のいずれかの辺を通ること。($\Leftrightarrow G - F$ で v と w が異なる連結成分に入ること。)
 - $W \subseteq V$ が vw -分離集合であるとは、任意の v - w 道が W のいずれかの点を中間点として通ること。($\Leftrightarrow G - W$ で v と w が異なる連結成分に入ること。)

辺形の Menger の定理 (1955 年、Ford & Fulkerson)

(1) の答え = vw -非連結化集合の辺数の最小値 (例の $\{g, l\}$)

Menger の定理 (1927 年、Menger)

(2) の答え = vw -分離集合の頂点数の最小値 (例の $\{u, x\}$)

整数性定理

「辺形の Menger の定理」は有向グラフでも成り立つ。

2 最大フローを求めるアルゴリズム

状況設定

$D = (V, A)$: 有向グラフ

$N = (D, \Psi)$: ネットワーク

(ただし $\Psi(a)$ ($a \in A$) は全て非負整数)

v : N の入口

w : N の出口

とするとき、 N の最大フロー φ を求めたい。

アイデア

今まで見つかったフロー φ と、まだ残っている容量を表すネットワーク $N' = (D, \Psi')$ を更新しながら N' の中で「増加道」を探索してゆく。

アルゴリズム

Step 0 : φ, N' の初期値は

- $\varphi =$ ゼロフロー
- $N' = N$

Step 1 : N' において v を根とする幅優先探索 (BFS) を実行して v - w 道 P を探索し、 P が見つからなければ終了。

Step 2 : P に属する弧の容量のうち最小の値を P 全体に与えてフロー ε を作る。
(ε を増加道と呼ぶ。)

Step 3 : φ を次のように更新する :

$$(\text{新 } \varphi) = (\text{旧 } \varphi) + \varepsilon$$

Step 4 : N' を次のように更新する :

$$\begin{cases} \Psi'(a) = \Psi'(a) - \varepsilon(a) \\ \Psi'(a^{-1}) = \Psi'(a^{-1}) + \varepsilon(a) \end{cases} \quad (\forall a \in A)$$

ただし a^{-1} は a と逆方向の弧で、 a^{-1} が無いときは新たに作る。

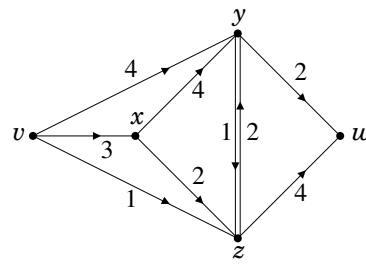
Step 5 : Step 1 に戻る。

注 : 手計算で実行するときは、ある程度のフローをみつけておいてそれを φ の初期値とすれば良い。その際、 N' の初期値は (Step 4 の ε) = φ として計算したものに
する。

実行例

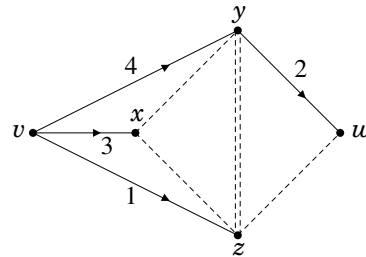
$$\left\{ \begin{array}{l} N = (D, \Psi) : \text{右図のネットワーク} \\ v : \text{入口} \\ w : \text{出口} \end{array} \right.$$

として N の最大フロー φ を求める。



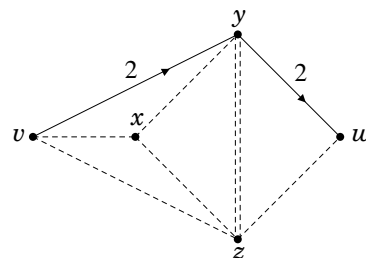
Step 1

N' (最初は $= N$) において v を根とする幅優先探索 (BFS) を実行し、 w に到達した時点で中断する。



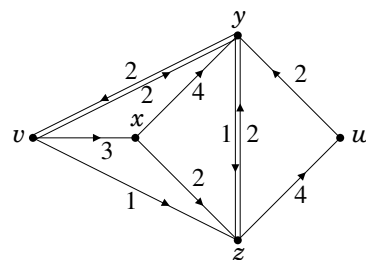
Step 2,3

増加道 ε (= 現在の φ) は右図のとおり



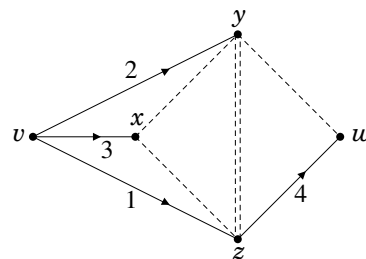
Step 4

N' は右図のとおり



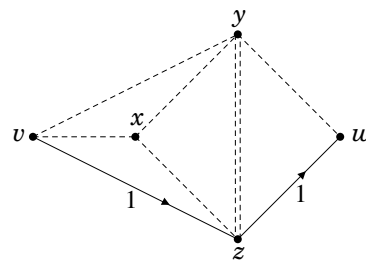
Step 1

N' で BFS を実行する。



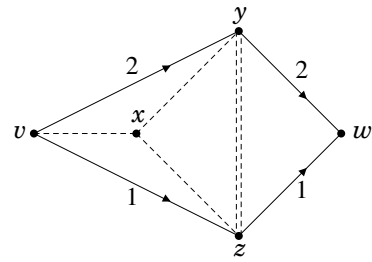
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



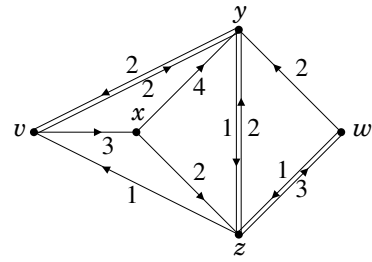
Step 3

新 φ (= 旧 φ + 増加道 ε) は右図のとおり。



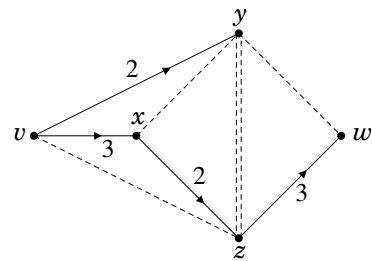
Step 4

N' は右図のとおり。



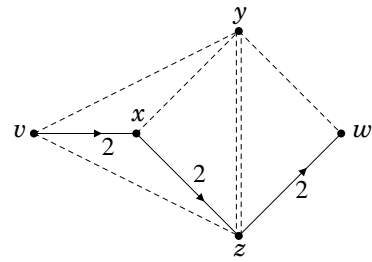
Step 1

N' で BFS を実行する。



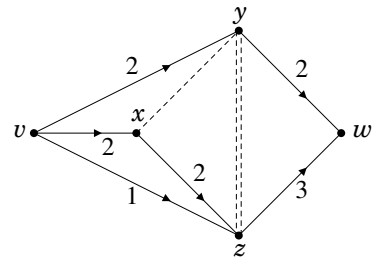
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



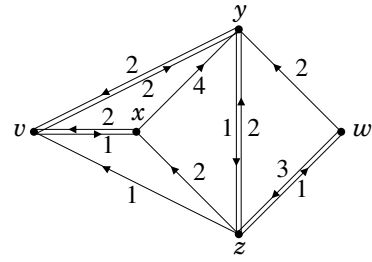
Step 3

新 φ (= 旧 φ + 増加道 ε) は右図のとおり。



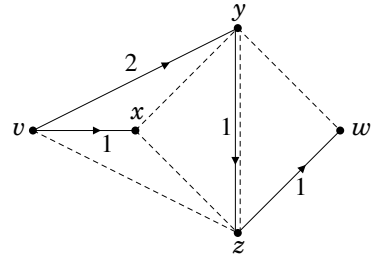
Step 4

N' は右図のとおり。



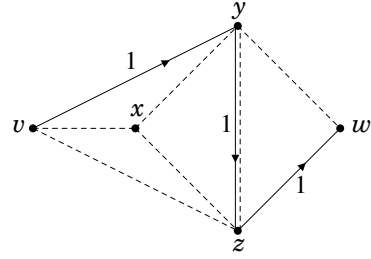
Step 1

N' で BFS を実行する。



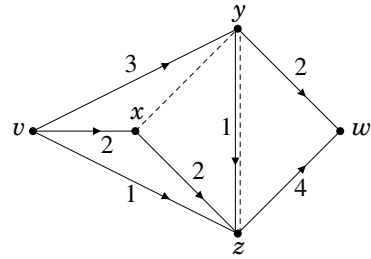
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



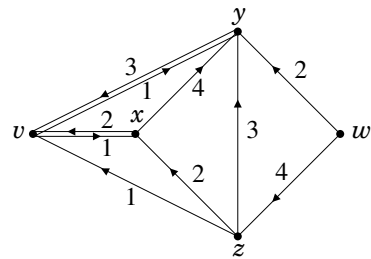
Step 3

新 φ (= 旧 φ + 増加道 ε) は右図のとおり。



Step 4

N' は右図のとおり。

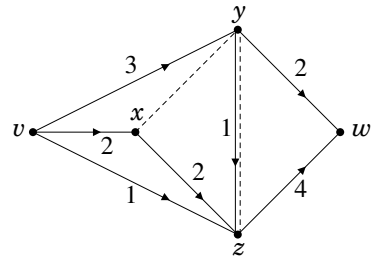


Step 1

(N' では w の入次数 = 0 となっているので) BFS を実行しても増加道はみつからず、ここで終了。

答え

最大フロー φ は右図のとおり。



手計算でアルゴリズムを実行するときは、そこそこのフロー φ_0 を見つけた段階から始めたら良い。(N' の初期状態は Step 4 で $\varepsilon = \varphi_0$ としたものになる。) また絵は φ と N' の 2 つだけ描いて、これらを更新してゆけば良い。