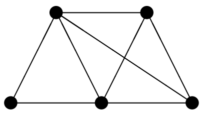
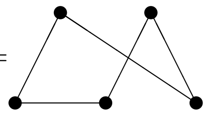
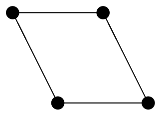
組合せとグラフの理論 （塩田）

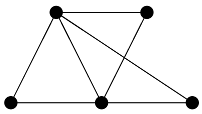
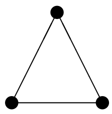
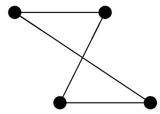
— グラフの閉路空間 —

1. 演算 $\oplus$

- グラフ G の辺の部分集合 C, D に対し、演算 $C \oplus D$ を集合の XOR （排他的論理和、片方にのみ含まれる辺の集合）で定義する：
$$C \oplus D = C \text{ XOR } D = (C \cup D) - (C \cap D)$$
- C, D が閉路 (の辺集合) ならば、$C \oplus D$ は辺を共有しない閉路いくつかに分けることができる。

例

$G =$  において $C =$  , $D =$ 

とすると、 $C \oplus D =$  $=$  $\oplus$ 

2. G の閉路空間 $W(G)$

- G 内の閉路から $C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_s$ の形で得られる辺の部分集合たちを要素とする集合を $W(G)$ と表し、G の閉路空間と呼ぶ。（ 空集合 $\emptyset$ も要素に入れる。）
- 演算 $\oplus$ は $W(G)$ に加法を定める。
- $\emptyset$ がゼロ（加法単位元）になる。
- $W(G)$ の要素を 2 倍するとゼロ $\emptyset$ になる。つまり $W(G)$ は 2 元体 $\mathbf{F}_2$ 上のベクトル空間になる。

$*$ $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$: 2 つしか数のない、一番シンプルな体
（ $2 = 0$, $-1 = 1$ の約束のもとで計算する。）

3. 線形代数のツボ

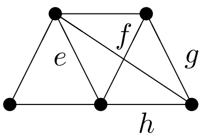
- **体**：加減乗除の**四則演算**ができる数の集合 (数、と呼ぶに相応しい。)
- 体 F 上の**ベクトル**：**和**と、F の数による**スカラー倍**が定義されているもの
- この簡単な約束ごとから、
  - ○ 次元 d が決まって d 本の座標軸が入る。
  - ○ F-成分の d-次元数ベクトルと同じ構造をもつ。
  - ○ 行列計算で処理できる。

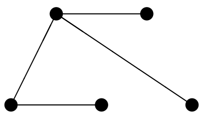
…… 等々いいことがいっぱい !!

- たとえば、$\mathbf{F}_2$ 上の d-次元ベクトル空間では 2^d 個ものベクトルがわずか d 個の基底ベクトルで統制できる。

4. 基本閉路系

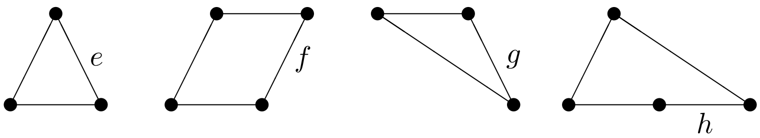
- G の全域木 T に、T に含まれない辺を付加すると閉路がひとつだけできる。そのようにしてできる閉路たちを T に関連した基本閉路系と呼ぶ。

例 $G =$ 

の全域木として $T =$ 
を取ったとき、

T に含まれない辺は e, f, g, h の 4 本。

$\Longrightarrow$ T に関連した基本閉路系 $\mathcal{F}$ は



5. 定理

- $\mathcal{F}$ は $W(G)$ の基底になる。
- つまり G 内の閉路は全て基本閉路から $\oplus$ で作れる。
- G のオーダー (頂点数)、サイズ (辺数) をそれぞれ n, m とすると

$$\dim W(G) = \text{基本閉路の個数} = m - n + 1$$

6. 電気回路への応用

電気回路の各導線の電流を求めるにはキルヒホフの法則を用いる：

(1) キルヒホフの第 1 法則
頂点では　電流の総和 $= 0$　が成り立つ。

(2) キルヒホフの第 2 法則
閉路では　(抵抗値 $\times$ 電流) の総和 $=$ 電圧の総和　が成り立つ。

(1) 式はひとつの頂点を除く全ての頂点に対して立て、(2) 式は基本閉路のみに対して立てて、連立一次方程式を解けばよい。...... 除外した 1 点についての (1) 式や、他の閉路についての (2) 式は自動的に成り立つ。