組合せとグラフの理論　(塩田)

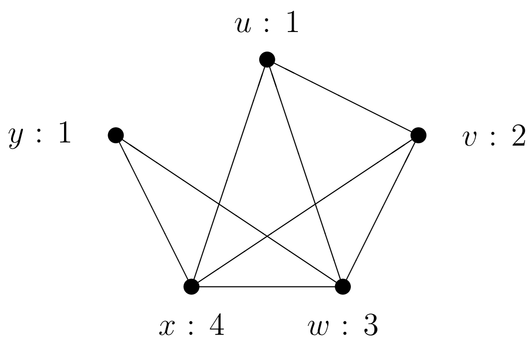
— グラフの彩色 —

1. スケジューリングと彩色問題の関係

問　次の表のように7人のメンバー $A, B, \cdots, G$ が5つの委員会 $u, v, \cdots, y$ に所属しているとする。各委員にとって会議が重ならないように5つの委員会の時間帯を設定せよ。

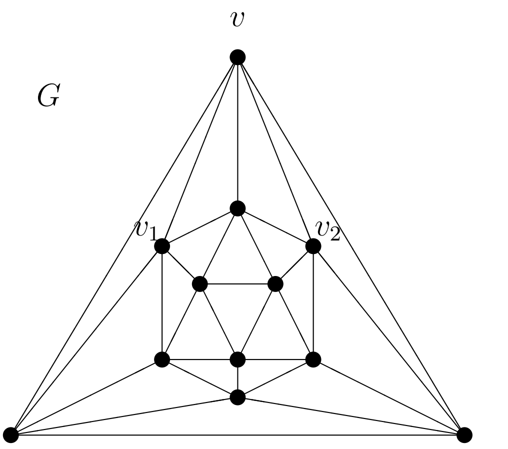
委員会	構成員
u	A　　　　D　E
v	A　B　　　　E
w	A　　C　D　　F
x	B　　D　　　G
y	C　　　F　G

解　委員会を点とし、構成員を共有する委員会同士を辺で結んだグラフを考える。構成員を共有する委員会を同時に開くことができない、ということが、丁度このグラフで点彩色を考えることに該当する。

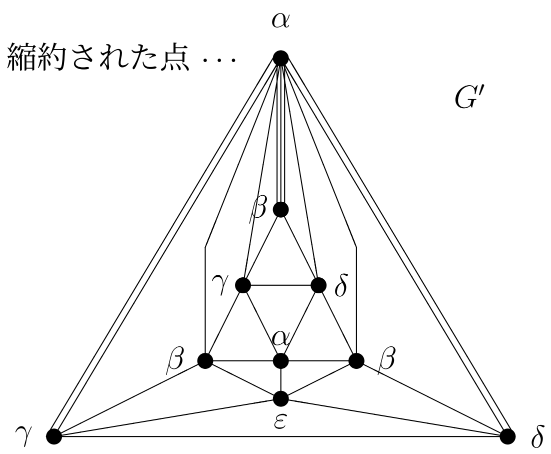


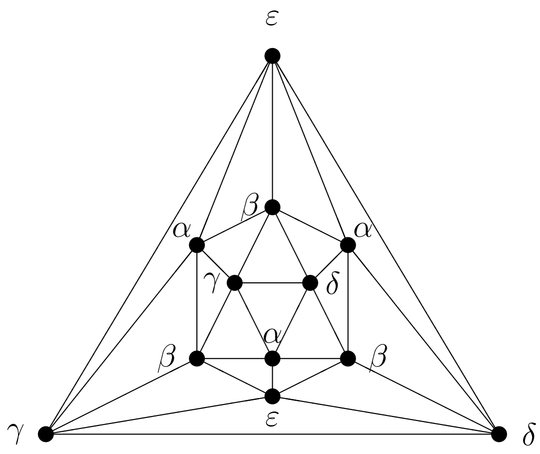
このグラフは K_4 を部分グラフに持つので点彩色には 4 色以上が必要である。そして上図のように 4 色で彩色ができるので彩色数は 4 であることがわかる。従ってこの 5 つの委員会は 4 コマで設定できる。

2. 定理 9 の証明の二十面体グラフの場合



vv_1, vv_2 を縮約し 5 色で彩色する。





v 以外の点には G' と同じ色を塗る。
すると v に塗れる色 ε が残っている。

3. 彩色数を求めるアルゴリズム

彩色多項式

グラフ G を x 色で点彩色する場合の数を $P_G(x)$ と表すと、$P_G(x)$ は x の多項式になる。これを「G の彩色多項式」と呼ぶ。

定理

G の勝手な辺 e を取り、$H = G - e$ (除去)、$K = G \backslash e$ (縮約) と置くとき、$P_G = P_H - P_K$ が成り立つ。

彩色数を求めるアルゴリズム

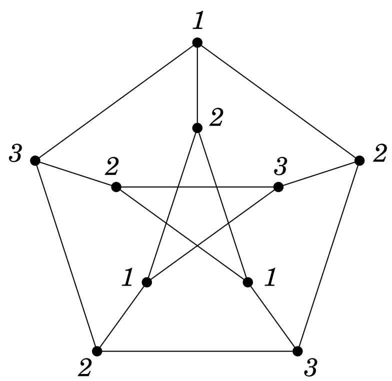
1° 上の定理を用いた再帰的プログラムで $P_G(x)$ を計算する。

2° $P_G(x)$ の一次因子を $x, x-1, \cdots$ の順に括り出してゆく。

3° 始めて割り切れなくなった一次因子を $x-k$ とすると、k が彩色数。

例：ピータースングラフの場合

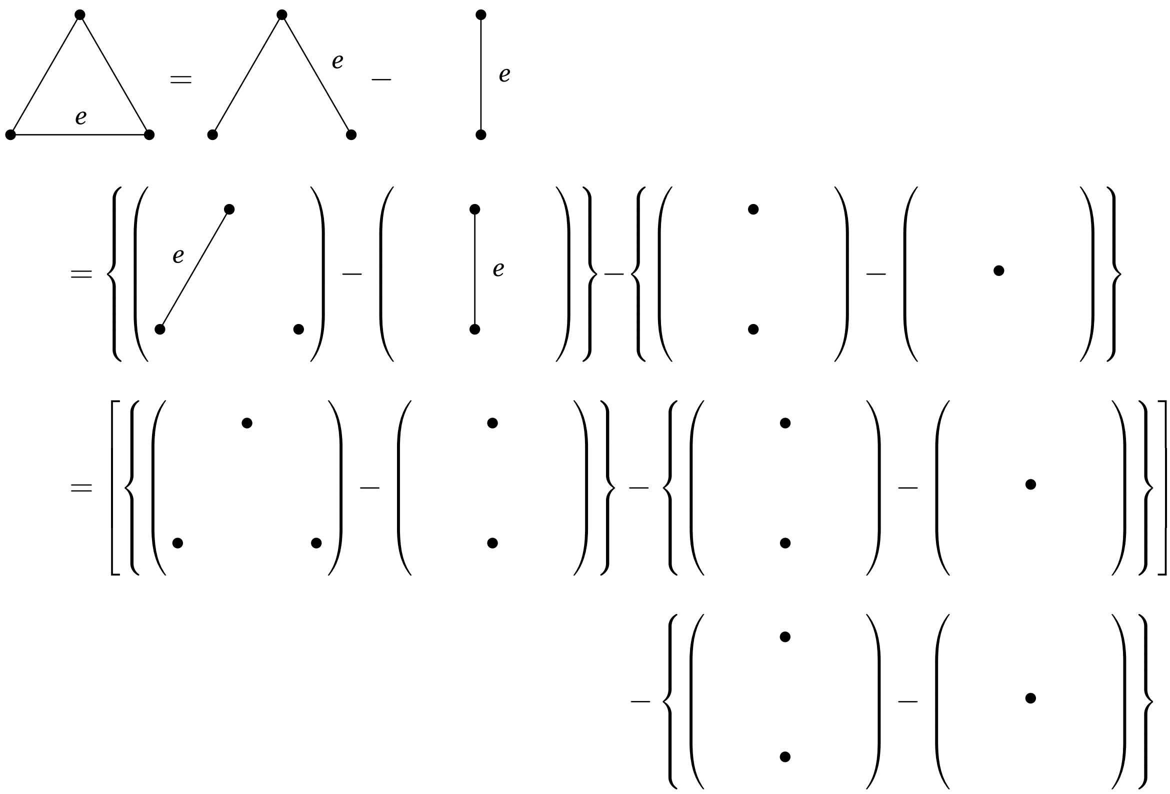
```
Graph :

 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0
 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0
 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0
 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1
 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0
 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1
 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1
 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0
 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0
```




```
Chromatic Polynomial :

X^10 - 15 X^9 + 105 X^8 - 455 X^7 + 1353 X^6 - 2861 X^5
+ 4275 X^4 - 4305 X^3 +2606 X^2 - 704 X

= (X) (X - 1) (X - 2) (X^7 - 12 X^6 + 67 X^5 - 230 X^4
+ 529 X^3 - 814 X^2 + 775 X - 352)

Chromatic Number = 3
```

4. 再帰的プログラムの動作（ K_3 の場合 ）

　教科書 pp.140-141 にならって、P_G の代わりにグラフの絵で彩色多項式を表すことにすると



$$
\begin{aligned}
&= [\{x^3 - x^2\} - \{x^2 - x\}] - \{x^2 - x\} \\
&= x^3 - 3x^2 + 2x \\
&= x(x-1)(x-2)
\end{aligned}
$$

※　手計算では K_n, N_n, 木, グラフの和等の場合の公式を使えるのでここまで細かくやる必要は無い。(教科書 p.141 の例では木や K_n の公式が使えるところまでで変形を終えている。)