組合せとグラフの理論　(塩田)

— Menger の定理、最大フロー —

1　Menger の定理

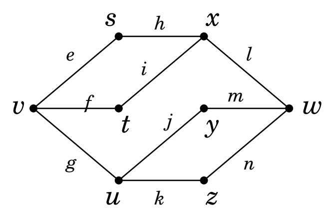
問　連結無向グラフ $G = (V, E)$ の 2 頂点 v, w に対して

(1) 辺素な（辺を共有しない）v-w 道は最大で何本あるか？

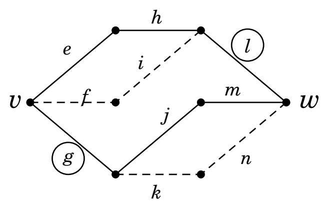
(2) 点素な（中間点を共有しない）v-w 道は最大で何本あるか？

(3) 有向グラフの場合はどうか？

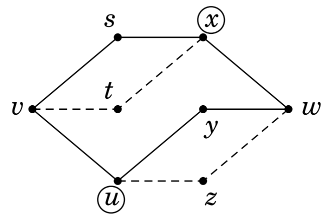
例　次のグラフでは



(1) の答え： 2 本



(2) の答え： 2 本



定義
- $F \subseteq E$ が vw-非連結化集合であるとは、任意の v-w 道が F のいずれかの辺を通ること。($\Leftrightarrow$ $G - F$ で v と w が異なる連結成分に入ること。)
- $W \subseteq V$ が vw-分離集合であるとは、任意の v-w 道が W のいずれかの点を中間点として通ること。($\Leftrightarrow$ $G - W$ で v と w が異なる連結成分に入ること。)

辺形の Menger の定理（1955 年、Ford & Fulkerson）
(1) の答え ＝ vw-非連結化集合の辺数の最小値（ 例の $\{g, \ell\}$ ）

Menger の定理（1927 年、Menger）
(2) の答え ＝ vw-分離集合の頂点数の最小値（ 例の $\{u, x\}$ ）

整数性定理
「辺形の Menger の定理」は有向グラフでも成り立つ。

2　最大フローを求めるアルゴリズム

状況設定

$D = (V, A)$: 有向グラフ

$N = (D, \Psi)$: ネットワーク
　(ただし $\Psi(a)$ ($a \in A$) は全て非負整数)

v : N の入口

w : N の出口

とするとき、N の最大フロー φ を求めたい。

アイデア

今まで見つかっているフロー φ と、まだ残っている容量を表すネットワーク $N' = (D, \Psi')$ を更新しながら N' の中で「増加道」を探索してゆく。

アルゴリズム

Step 0 : φ, N' の初期値は

- $\varphi =$ ゼロフロー
- $N' = N$

Step 1 : N' において v を根とする幅優先探索 (BFS) を実行して v-w 道 P を探索し、P が見つからなければ終了。

Step 2 : P に属する弧の容量のうち最小の値を P 全体に与えてフロー ε を作る。(ε を増加道と呼ぶ。)

Step 3 : φ を次のように更新する :

(新 φ) = (旧 φ) + ε

Step 4 : N' を次のように更新する :

$$\begin{cases} \Psi'(a) = \Psi'(a) - \varepsilon(a) \\ \Psi'(a^{-1}) = \Psi'(a^{-1}) + \varepsilon(a) \end{cases} \quad (\forall a \in A)$$

ただし a^{-1} は a と逆方向の弧で、a^{-1} が無いときは新たに作る。

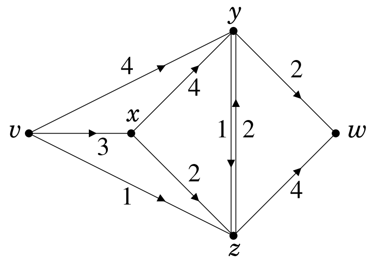
Step 5 : **Step 1** に戻る。

注 : 手計算で実行するときは、ある程度のフローをみつけておいてそれを φ の初期値とすれば良い。その際、N' の初期値は (**Step 4** の ϵ) = φ として計算したものにする。

実行例

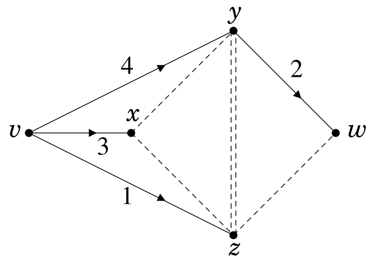
$$\begin{cases} N=(D,\Psi) : \text{右図のネットワーク} \\ \quad v \quad : \text{入口} \\ \quad w \quad : \text{出口} \end{cases}$$

として N の最大フロー φ を求める。



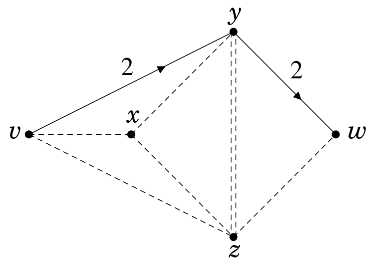
Step 1

N' (最初は $= N$) において v を根とする幅優先探索 (BFS) を実行し、w に到達した時点で中断する。



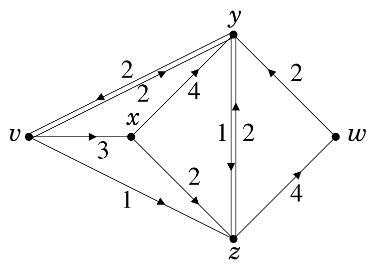
Step 2,3

増加道 ε ($=$ 現在の φ) は右図のとおり



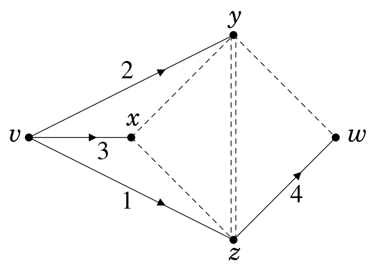
Step 4

N' は右図のとおり



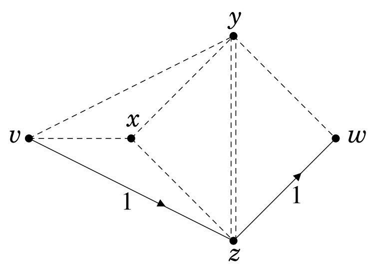
Step 1

N' で BFS を実行する。



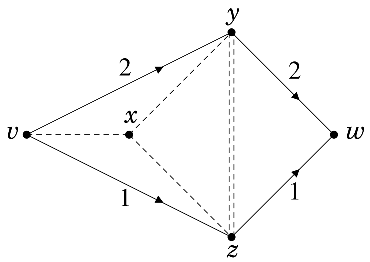
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



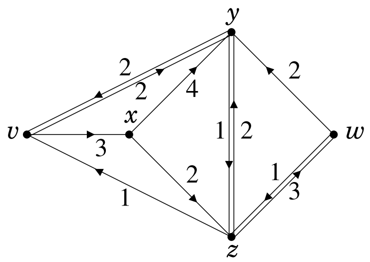
Step 3

新 φ (= 旧 φ + 増加道 ε) は右図のとおり。



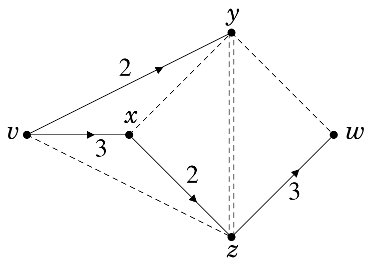
Step 4

N' は右図のとおり。



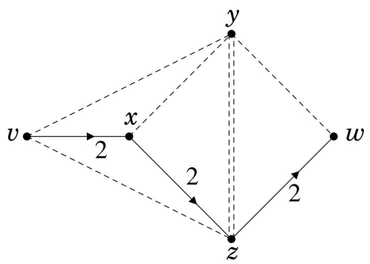
Step 1

N' で BFS を実行する。



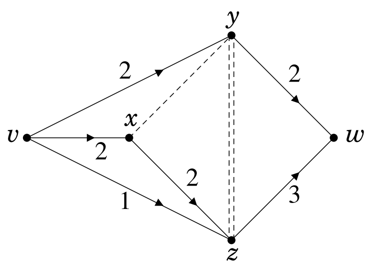
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



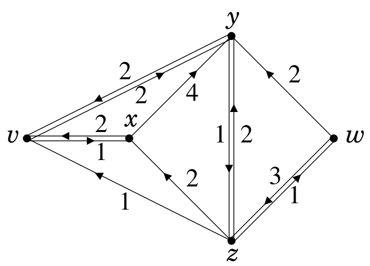
Step 3

新 φ (= 旧 φ + 増加道 ε) は右図のとおり。



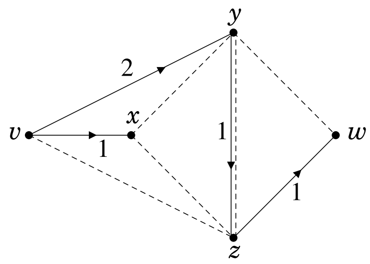
Step 4

N' は右図のとおり。



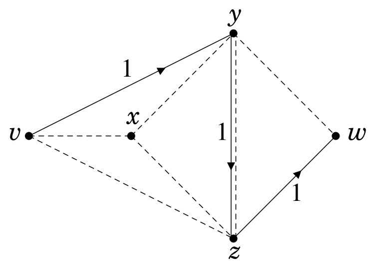
Step 1

N' で BFS を実行する。



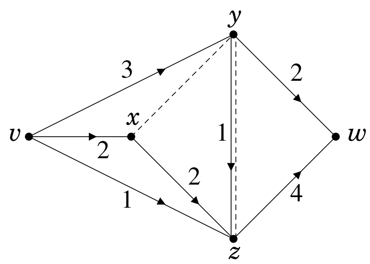
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



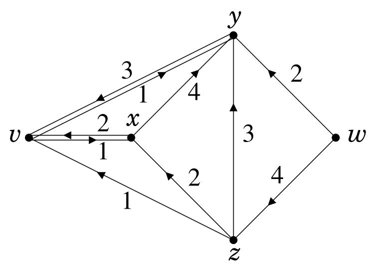
Step 3

新 φ (= 旧 φ + 増加道 ε) は右図のとおり。



Step 4

N' は右図のとおり。

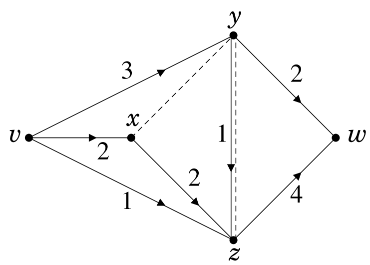


Step 1

(N' では w の入次数 $= 0$ となっているので) BFS を実行しても増加道はみつからず、ここで終了。

答え

最大フロー φ は右図のとおり。



※　手計算でアルゴリズムを実行するときは、そこそこのフロー φ_0 を見つけた段階から始めたら良い。(N' の初期状態は **Step 4** で $\varepsilon = \varphi_0$ としたものになる。) また絵は φ と N' の 2 つだけ描いて、これらを更新してゆけば良い。