組合せとグラフの理論　（塩田）

— 最短路問題：Dijkstra のアルゴリズム —

問　重み付きグラフ G において、出発点 s から目的地 t への最短路を求めよ。

方針

- 出発点 s に最も近い点、2 番目に近い点、$\cdots$ を順に求めてゆく。
- 各点 v に「今まで見つかっている最短距離」 $\ell(v)$ （仮ラベル）を考える。
- 最短距離が確定した点の仮ラベルを永久ラベルに昇格させ、それをもとに未昇格点の仮ラベルを更新する、という作業を反復する。

アルゴリズム

1° 出発点 s には 仮ラベル $\ell(s)=0$, s 以外の全ての点 v には仮ラベル $\ell(v)=\infty$ をつける。

2° 出発点 s の仮ラベルを永久ラベルに昇格させる。

3° 永久ラベルに昇格したばかりの点を x とし、x に隣接する未昇格な点 v それぞれに対して、$\ell(v)$ を

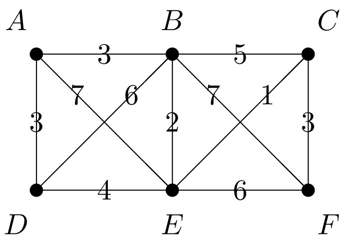
$$\min(\ell(v), \ell(x)+w(xv))$$

に更新する。（ x を経由した方が短ければ、v の親 $=x$ を登録しておく。）

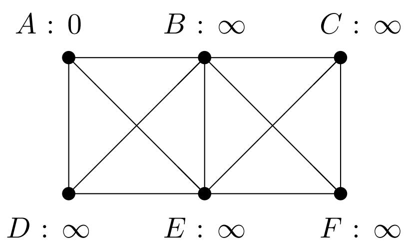
4° 未昇格な点の仮ラベルのうち最小のものを永久ラベルに昇格させる。

5° 目的地 t に永久ラベルが付くまで Step 3°– 4° を繰り返す。

実行例　次の地図について、$s=A$ から $t=F$ への最短路を求める。



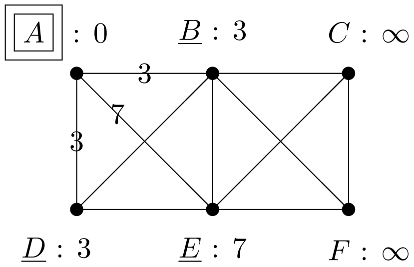
ラベルの初期状態：



$\ell(A)=0$
$\ell(B)=\infty$
$\ell(C)=\infty$
$\ell(D)=\infty$
$\ell(E)=\infty$
$\ell(F)=\infty$

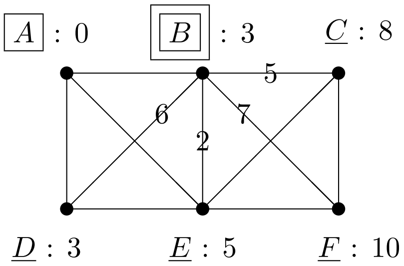
$\Rightarrow$ $\ell(A)=0$ を永久ラベルに昇格

以下、昇格済みの点を囲み文字、昇格したばかりの点 x を二重囲み文字、x に隣接する未昇格な点たちを下線付き文字で表す。



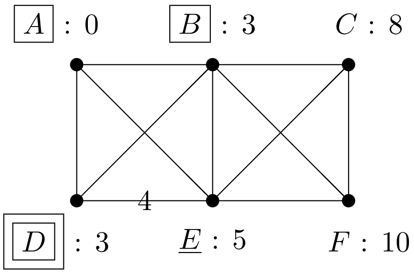
$\ell(B) = \min(\infty, 0+3) = 3$ (親は A)
$\ell(C) = \infty$
$\ell(D) = \min(\infty, 0+3) = 3$ (親は A)
$\ell(E) = \min(\infty, 0+7) = 7$ (親は A)
$\ell(F) = \infty$

$\Rightarrow \ell(B) = 3$ を永久ラベルに昇格



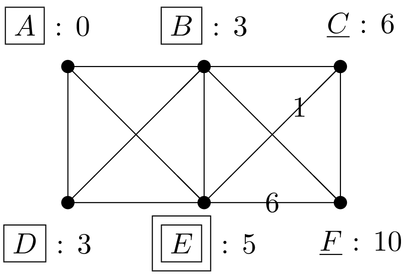
$\ell(C) = \min(\infty, 3+5) = 8$ (親は B)
$\ell(D) = \min(3, 3+6) = 3$ (親は A)
$\ell(E) = \min(7, 3+2) = 5$ (親は B)
$\ell(F) = \min(\infty, 3+7) = 10$ (親は B)

$\Rightarrow \ell(D) = 3$ を永久ラベルに昇格



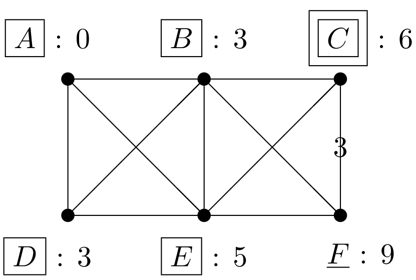
$\ell(C) = 8$ (親は B)
$\ell(E) = \min(5, 3+4) = 5$ (親は B)
$\ell(F) = 10$ (親は B)

$\Rightarrow \ell(E) = 5$ を永久ラベルに昇格



$\ell(C) = \min(8, 5+1) = 6$ (親は E)
$\ell(F) = \min(10, 5+6) = 10$ (親は B)

$\Rightarrow \ell(C) = 6$ を永久ラベルに昇格



$\ell(F) = \min(10, 6+3) = 9$ (親は C)

$\Rightarrow \ell(F) = 9$ を永久ラベルに昇格

$t = F$ のラベルが昇格したのでここで終了。親を辿って、最短の A-F 道 $A \to B \to E \to C \to F$ を出力する。