組合せとグラフの理論　(塩田)

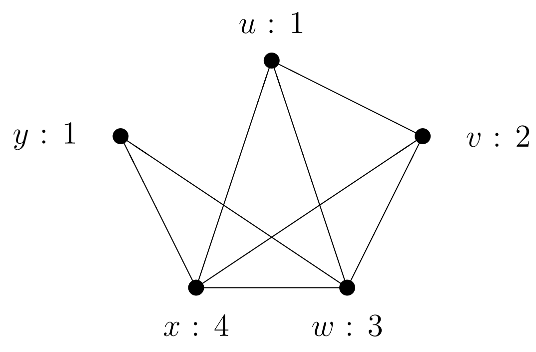
— グラフの彩色 —

1. スケジューリングと彩色問題の関係

問　次の表のように 7 人のメンバー $A, B, \cdots, G$ が 5 つの委員会 $u, v, \cdots, y$ に所属しているとする。各委員にとって会議が重ならないように 5 つの委員会の時間帯を設定せよ。

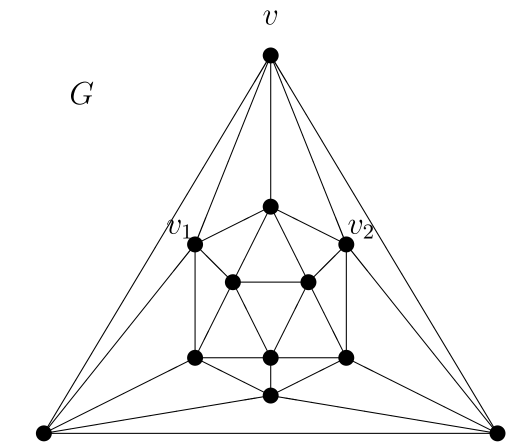
委員会	構成員
u	A　　　　D　E
v	A　B　　　　E
w	A　　C　D　　F
x	B　　D　　　G
y	C　　　F　G

解　委員会を点とし、構成員を共有する委員会同士を辺で結んだグラフを考える。構成員を共有する委員会を同時に開くことができない、ということが、丁度このグラフで点彩色を考えることに該当する。

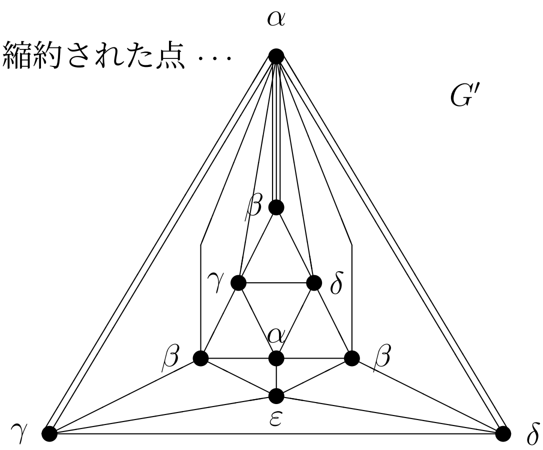


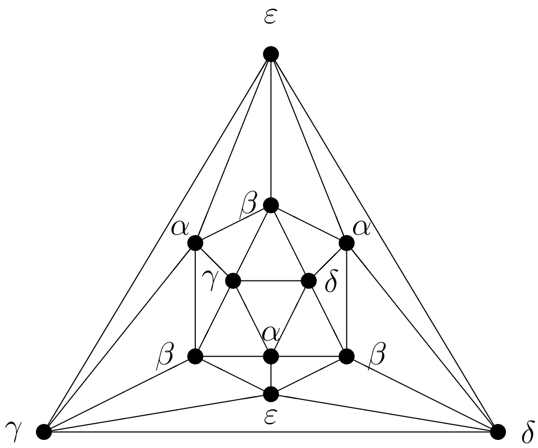
このグラフは K_4 を部分グラフに持つので点彩色には 4 色以上が必要である。そして上図のように 4 色で彩色ができるので彩色数は 4 であることがわかる。従ってこの 5 つの委員会は 4 コマで設定できる。

2. 定理 9 の証明の二十面体グラフの場合



vv_1, vv_2 を縮約し 5 色で彩色する。





v 以外の点には G' と同じ色を塗る。
すると v に塗れる色 ε が残っている。

3. 彩色数を求めるアルゴリズム

彩色多項式

グラフ G を k 色で点彩色する場合の数を $P_G(k)$ と表すと、$P_G(k)$ は k の多項式になる。これを「G の彩色多項式」と呼ぶ。

定理

G の勝手な辺 e を取り、$H = G - e$ (除去)、$K = G \backslash e$ (縮約) と置くとき、$P_G = P_H - P_K$ が成り立つ。

彩色数を求めるアルゴリズム

1° 上の定理を用いた再帰的プログラムで $P_G(x)$ を計算する。

2° $P_G(x)$ の一次因子を $x, x-1, \cdots$ の順に括り出してゆく。

3° 始めて割り切れなくなった一次因子を $x - m$ とすると、m が彩色数。

例：ピータースングラフの場合

```
Graph :

 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0
 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0
 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0
 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1
 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0
 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1
 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1
 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0
 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0

Chromatic Polynomial :

X^10 - 15 X^9 + 105 X^8 - 455 X^7 + 1353 X^6 - 2861 X^5
+ 4275 X^4 - 4305 X^3 +2606 X^2 - 704 X

= (X) (X - 1) (X - 2) (X^7 - 12 X^6 + 67 X^5 - 230 X^4
+ 529 X^3 - 814 X^2 + 775 X - 352)

Chromatic Number = 3
```