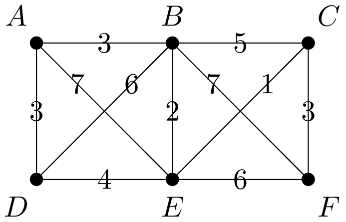
組合せとグラフの理論　(塩田)

— 最短路問題 : Dijkstra のアルゴリズム —

問　次の地図について、A から F への最短路を求めよ。



方針

- 出発点 A に最も近い点、2 番目に近い点、$\cdots$ を順に求めてゆく。
- 各点 v に「今まで見つかっている最短距離」 $\ell(v)$ （仮ラベル）を考える。
- 最短距離が確定した点の仮ラベルを永久ラベルに昇格させ、それをもとに未昇格点の仮ラベルを更新する、という作業を反復する。

アルゴリズム

1°　出発点 A には 仮ラベル $\ell(A)=0$, A 以外の全ての点 v には仮ラベル $\ell(v)=\infty$ をつける。

2°　出発点 A の仮ラベルを永久ラベルに昇格させる。

3°　永久ラベルに昇格した点を x とする。
x に隣接する未昇格な点 v それぞれに対して、$\ell(v)$ を

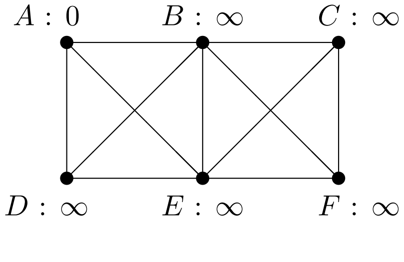
$$\min(\ell(v),\, \ell(x)+w(xv))$$

に更新する。(x を経由した方が短ければ、直前の点として x を登録しておく。)

4°　未昇格な点の仮ラベルのうち最小のものを永久ラベルに昇格させる。

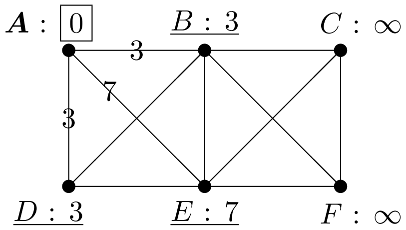
5°　目的地に永久ラベルが付くまで Step 3°– 4° を繰り返す。

実行例



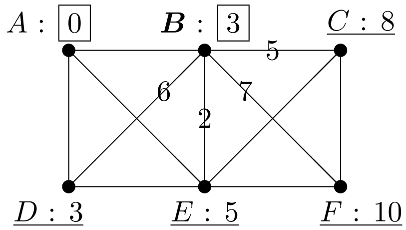
$\ell(A)=0$
$\ell(B)=\infty$
$\ell(C)=\infty$
$\ell(D)=\infty$
$\ell(E)=\infty$
$\ell(F)=\infty$

$\Rightarrow$ $\ell(A)=0$ を永久ラベルに昇格



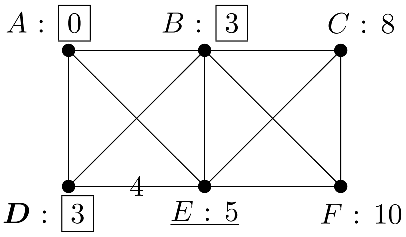
$$
\begin{aligned}
&\ell(B) = \min(\infty, 0+3) = 3 \text{ (} \underline{\text{直前は } A} \text{)}\\
&\ell(C) = \infty\\
&\ell(D) = \min(\infty, 0+3) = 3 \text{ (直前は } A \text{)}\\
&\ell(E) = \min(\infty, 0+7) = 7 \text{ (直前は } A \text{)}\\
&\ell(F) = \infty
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \ell(B) = 3$ を永久ラベルに昇格



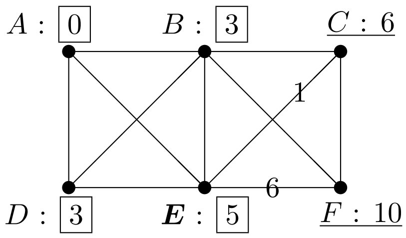
$$
\begin{aligned}
&\ell(C) = \min(\infty, 3+5) = 8 \text{ (直前は } B \text{)}\\
&\ell(D) = \min(3, 3+6) = 3 \text{ (直前は } A \text{)}\\
&\ell(E) = \min(7, 3+2) = 5 \text{ (直前は } B \text{)}\\
&\ell(F) = \min(\infty, 3+7) = 10 \text{ (直前は } B \text{)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \ell(D) = 3$ を永久ラベルに昇格



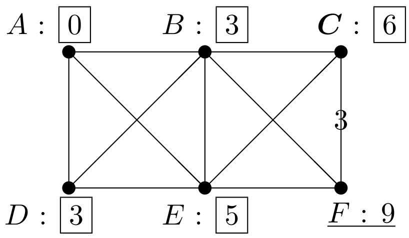
$$
\begin{aligned}
&\ell(C) = 8 \text{ (直前は } B \text{)}\\
&\ell(E) = \min(5, 3+4) = 5 \text{ (} \underline{\text{直前は } B} \text{)}\\
&\ell(F) = 10 \text{ (直前は } B \text{)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \ell(E) = 5$ を永久ラベルに昇格



$$
\begin{aligned}
&\ell(C) = \min(8, 5+1) = 6 \text{ (} \underline{\text{直前は } E} \text{)}\\
&\ell(F) = \min(10, 5+6) = 10 \text{ (直前は } B \text{)}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \ell(C) = 6$ を永久ラベルに昇格



$$
\ell(F) = \min(10, 6+3) = 9 \text{ (} \underline{\text{直前は } C} \text{)}
$$

$\Rightarrow \ell(F) = 9$ を永久ラベルに昇格

よって $A \to F$ の最短路は $A \to B \to E \to C \to F$.