# 組合せとグラフの理論　( 塩田 )

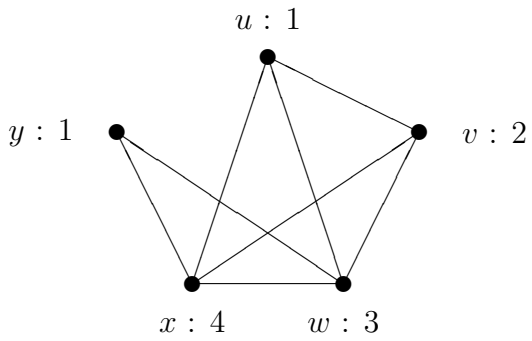
## — グラフの彩色 —

### 1. スケジューリングと彩色問題の関係

**問**　次の表のように 7 人のメンバー $A, B, \cdots, G$ が 5 つの委員会 $u, v, \cdots, y$ に所属しているとする。各委員にとって会議が重ならないように 5 つの委員会の時間帯を設定せよ。

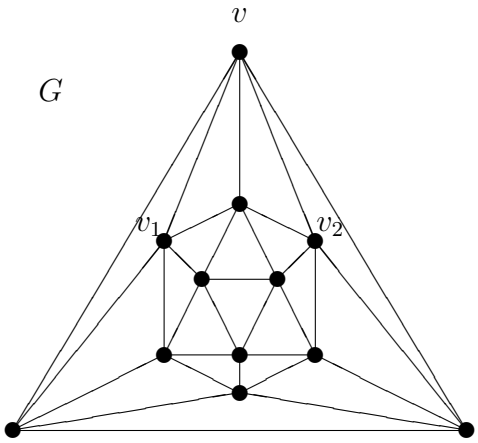
| 委員会 | 構成員 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | $A$ | | | $D$ | $E$ | | |
| $v$ | $A$ | $B$ | | | $E$ | | |
| $w$ | $A$ | | $C$ | $D$ | | $F$ | |
| $x$ | | $B$ | | $D$ | | | $G$ |
| $y$ | | | $C$ | | | $F$ | $G$ |

**解**　委員会を点とし、構成員を共有する委員会同士を辺で結んだグラフを考える。構成員を共有する委員会を同時に開くことができない、ということが、丁度このグラフで点彩色を考えることに該当する。

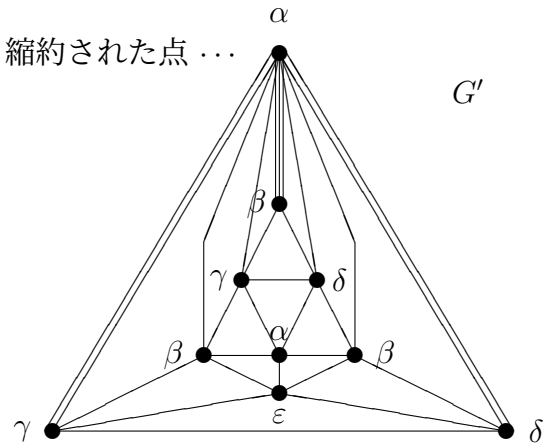


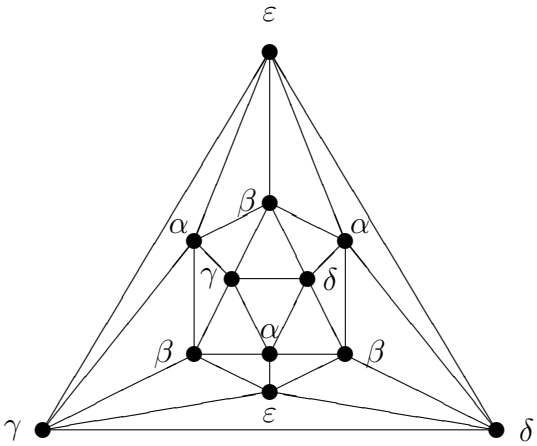

このグラフは $K_4$ を部分グラフに持つので点彩色には 4 色以上が必要である。そして上図のように 4 色で彩色ができるので彩色数は 4 であることがわかる。従ってこの 5 つの委員会は 4 コマで設定できる。

## 2. 定理 9 の証明の二十面体グラフの場合




$vv_1$, $vv_2$ を縮約し 5 色で彩色する。




$v$ 以外の点には $G'$ と同じ色を塗る。
すると $v$ に塗れる色 $\varepsilon$ が残っている。

## 3. 彩色数を求めるアルゴリズム

### 彩色多項式

グラフ $G$ を $k$ 色で点彩色する場合の数を $P_G(k)$ と表すと、$P_G(k)$ は $k$ の多項式になる。これを「$G$ の彩色多項式」と呼ぶ。

### 定理

$G$ の勝手な辺 $e$ を取り、$H = G - e$ ( 除去 )、$K = G \backslash e$ ( 縮約 ) と置くとき、$P_G = P_H - P_K$ が成り立つ。

### 彩色数を求めるアルゴリズム

1° 上の定理を用いた再帰的プログラムで $P_G(x)$ を計算する。

2° $P_G(x)$ の一次因子を $x, x-1, \cdots$ の順に括り出してゆく。

3° 始めて割り切れなくなった一次因子を $x - m$ とすると、$m$ が彩色数。

### 例：ピータースングラフの場合

```
Graph :

 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0
 1 0 1 0 0 0 1 0 0 0
 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0
 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1
 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0
 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1
 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1
 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0
 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0

Chromatic Polynomial :

X^10 - 15 X^9 + 105 X^8 - 455 X^7 + 1353 X^6 - 2861 X^5
+ 4275 X^4 - 4305 X^3 +2606 X^2 - 704 X

= (X) (X - 1) (X - 2) (X^7 - 12 X^6 + 67 X^5 - 230 X^4
+ 529 X^3 - 814 X^2 + 775 X - 352)

Chromatic Number = 3
```