

組合せとグラフの理論 (塩田)

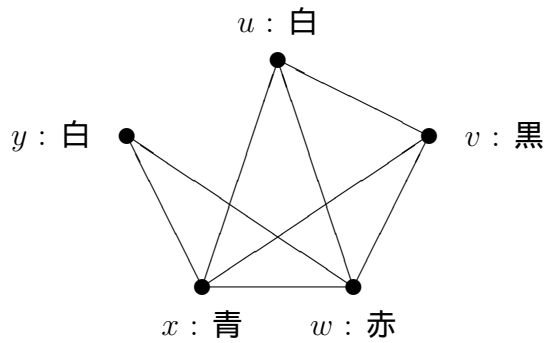
— グラフの彩色 —

1. スケジューリングと彩色問題の関係

問 次の表のように7人のメンバー A, B, \dots, G が5つの委員会 u, v, \dots, y に所属しているとする。各委員にとって会議が重ならないように5つの委員会の時間帯を設定せよ。

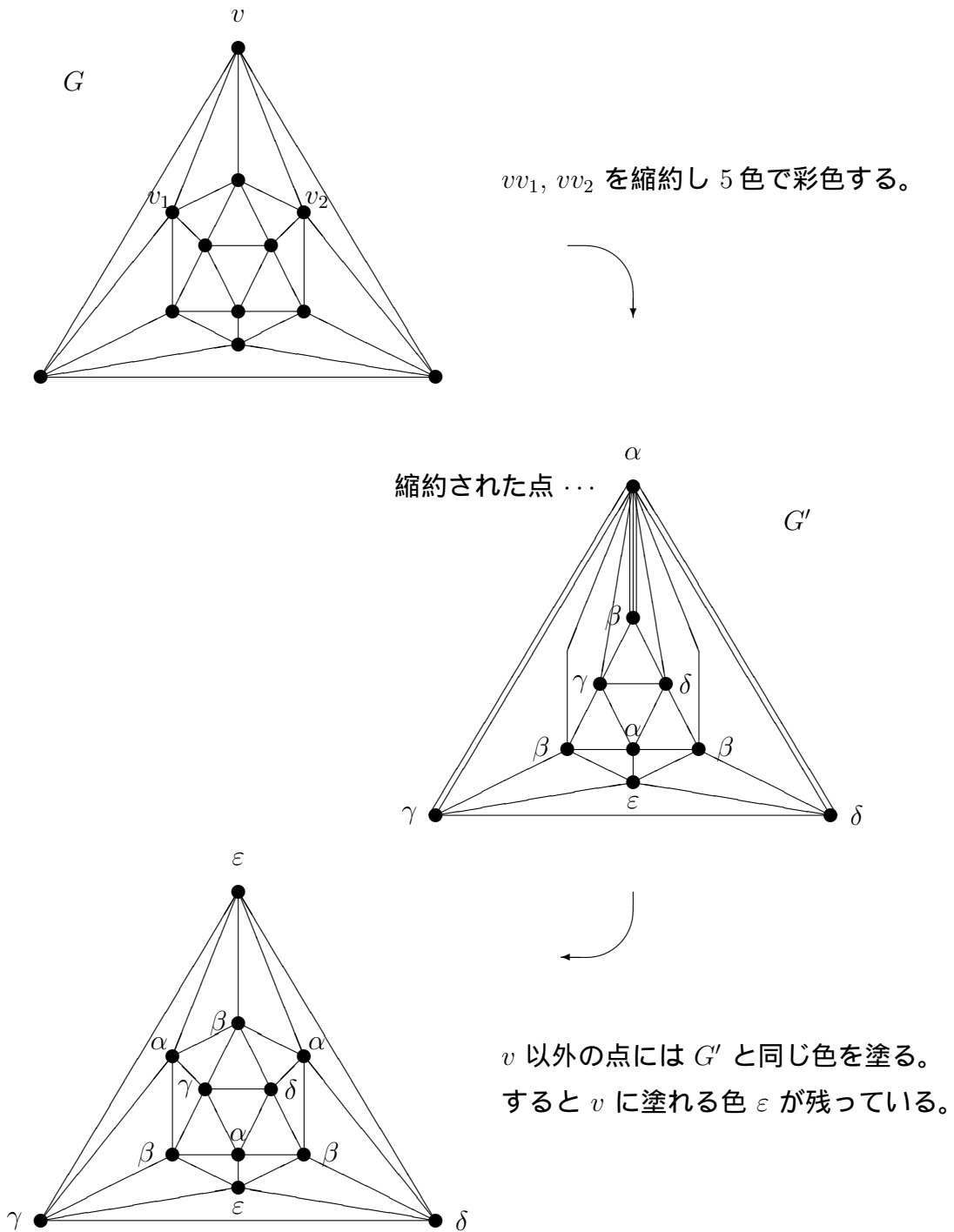
委員会	構成員
u	$A \quad D \quad E$
v	$A \quad B \quad E$
w	$A \quad C \quad D \quad F$
x	$B \quad D \quad G$
y	$C \quad F \quad G$

解 委員会を点とし、構成員を共有する委員会同志を辺で結んだグラフを描く。



このグラフの彩色数は4なので4コマで設定できる。

2. 定理9の証明の二十面体グラフの場合



3. 彩色数を求めるアルゴリズム

彩色多項式

グラフ G を k 色で点彩色する場合の数を $P_G(k)$ と表すと、 $P_G(k)$ は k の多項式になる。これを「 G の彩色多項式」と呼ぶ。

定理

G の勝手な辺 e を取り、 $H = G - e$ (除去)、 $K = G \setminus e$ (縮約) と置くと、 $P_G = P_H - P_K$ が成り立つ。

彩色数を求めるアルゴリズム

Step 1. 上の定理を用いた再帰的プログラムで $P_G(x)$ を計算する。

Step 2. $P_G(x)$ の一次因子を $x, x - 1, \dots$ の順に括り出してゆく。

Step 3. 始めて割り切れなくなった一次因子を $x - m$ とすると、 m が彩色数。

例：ピーターズグラフの場合

Graph :

```
0 1 0 0 1 1 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0 1 0 0 0
0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0 1 0 0 0 1 0
1 0 0 1 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1 0
0 1 0 0 0 0 0 0 1 1
0 0 1 0 0 1 0 0 0 1
0 0 0 1 0 1 1 0 0 0
0 0 0 0 1 0 1 1 0 0
```

Chromatic Polynomial :

$$X^{10} - 15 X^9 + 105 X^8 - 455 X^7 + 1353 X^6 - 2861 X^5 + 4275 X^4 - 4305 X^3 + 2606 X^2 - 704 X$$

$$= (X) (X - 1) (X - 2) (X^7 - 12 X^6 + 67 X^5 - 230 X^4 + 529 X^3 - 814 X^2 + 775 X - 352)$$

Chromatic Number = 3