組合せとグラフの理論　(塩田)

— 最大フロー を求めるアルゴリズム —

状況設定

$D = (V, A)$: 有向グラフ

$N = (D, \Psi)$: ネットワーク
(ただし $\Psi(a)$ ($a \in A$) は全て非負整数)

v : N の入口

w : N の出口

とするとき、N の最大フロー φ を求めたい。

アイデア

まだ残っている容量を表すネットワーク $N' = (D, \Psi')$ を更新しながら N' の中で「増加道」を探索してゆく。

アルゴリズム

Step 0 : φ, N' の初期値は

- $\varphi =$ ゼロフロー
- $N' = N$

Step 1 : N' において v を根とする広さ優先探索 (WFS) を実行して v-w 道 P を探索し、P が見つからなければ終了。

Step 2 : P に属する弧の容量のうち最小の値を P 全体に与えてフロー ε を作る。(ε を増加道と呼ぶ。)

Step 3 : φ を次のように更新する :

(新 φ) = (旧 φ) + ε

Step 4 : N' を次のように更新する :

$$\begin{cases} \Psi'(a) = \Psi'(a) - \varepsilon(a) \\ \Psi'(a^{-1}) = \Psi'(a^{-1}) + \varepsilon(a) \end{cases} \quad (\forall a \in A)$$

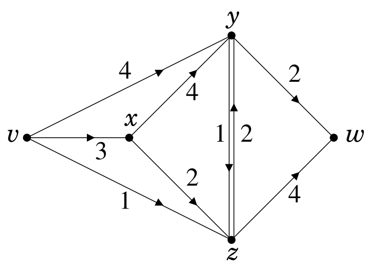
ただし a^{-1} は a と逆方向の弧で、a^{-1} が無いときは新たに作る。

Step 5 : **Step 1** に戻る。

<u>実行例</u>

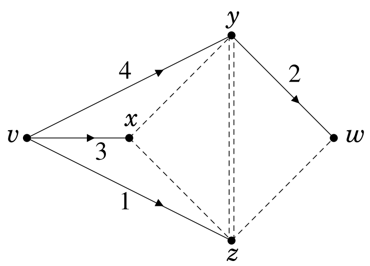
$$\begin{cases} N = (D, \Psi) : \text{右図のネットワーク} \\ \quad v \quad\quad : \text{入口} \\ \quad w \quad\quad : \text{出口} \end{cases}$$

として N の最大フロー φ を求める。



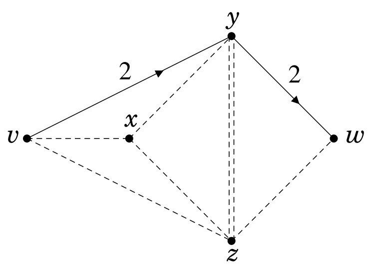
Step 1

N' において v を根とする広さ優先探索 (WFS) を実行し、w に到達した時点で中断する。



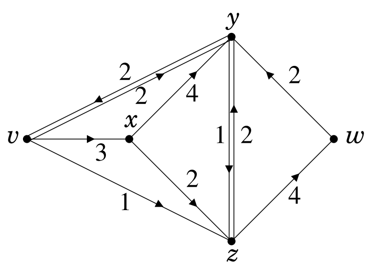
Step 2,3

増加道 ε ($=$ 現在の φ) は右図のとおり



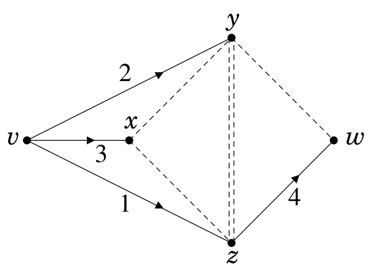
Step 4

N' は右図のとおり



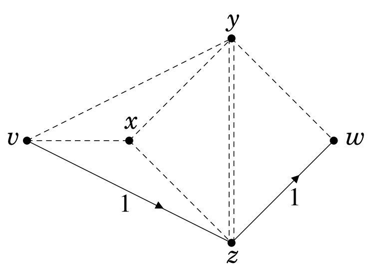
Step 1

N' で WFS を実行する。



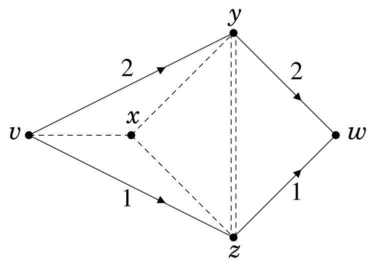
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



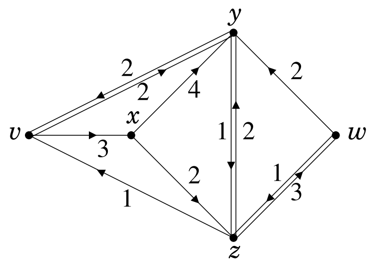
Step 3

新 φ (= 旧 φ + 増加道 ε) は右図のとおり。



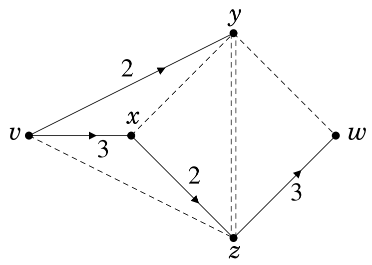
Step 4

N' は右図のとおり。



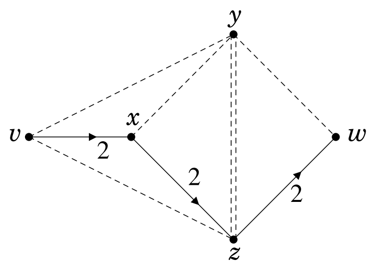
Step 1

N' で WFS を実行する。



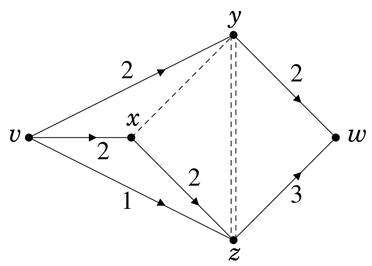
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



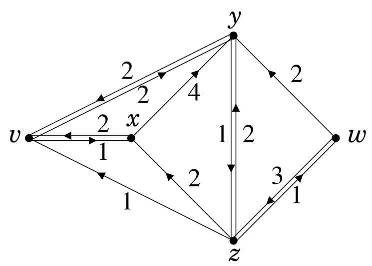
Step 3

新 φ (= 旧 φ + 増加道 ε) は右図のとおり。



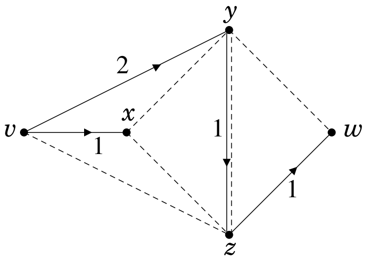
Step 4

N' は右図のとおり。



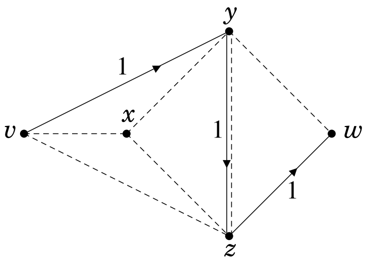
Step 1

N' で WFS を実行する。



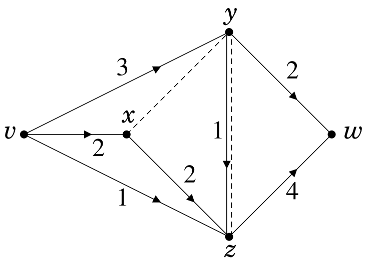
Step 2

増加道 ε は右図のとおり。



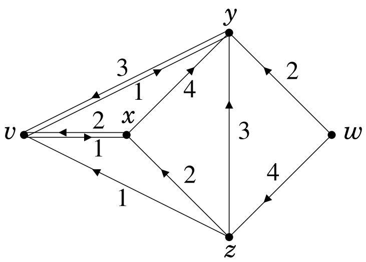
Step 3

新 φ ($=$ 旧 $\varphi +$ 増加道 ε) は右図のとおり。



Step 4

N' は右図のとおり。



Step 1

N' では w の入次数 $= 0$ となっているので、WFS を実行しても増加道はみつからず、ここで終了。

答え

最大フロー φ は右図のとおり。