組合せとグラフの理論 （塩田）

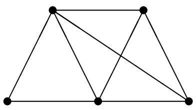
— グラフの閉路空間 —

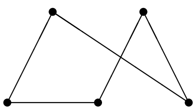
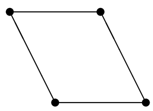
1. 閉路の演算 $\oplus$

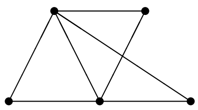
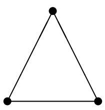
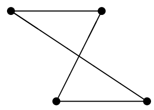
- グラフ G 内のふたつの閉路 C, D に対し、演算 $C \oplus D$ を辺集合の XOR （片方にのみ含まれる辺の集合）で定義する：

$$C \oplus D = (C \cup D) - (C \cap D)$$

例

G :  において

$C =$  $D =$  のとき、

$C \oplus D =$  $=$  $\oplus$ 

2. G の閉路空間 $W(G)$

- $W(G)$ の要素は G 内の閉路の形式和　$C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_s$
  （ 空集合 $\emptyset$ も要素に入れる。）
- 演算 $\oplus$ は $W(G)$ の加法を定める。
- $\emptyset$ がゼロ（加法単位元）になる。
- $W(G)$ の要素を 2 倍するとゼロ $\emptyset$ になる。
- つまり $W(G)$ は 2 元体 $\mathbf{F}_2$ 上のベクトル空間になる。

$*$ $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$: 2 つしか数のない、一番シンプルな体
（ $2 = 0,\ -1 = 1$ の約束のもとで計算する。）

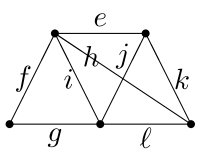
3. 線形代数のツボ

- 体：加減乗除の四則演算ができる数の集合 (数、と呼ぶに相応しい。)

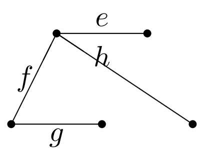
- 体 F 上のベクトル：**和**と、F の数による**スカラー倍**が定義されているもの
- この簡単な約束ごとから、
  - 次元 d が決まる。
  - F-成分の d-次元数ベクトルと同じ構造をもつ。
  - 行列計算で処理できる。

  ※ つまり扱いやすくて嬉しい。
- たとえば、$\mathbf{F}_2$ 上の d-次元ベクトル空間では 2^d 個ものベクトルがわずか d 個の基底ベクトルで統制できる。

4. 基本閉路系



G

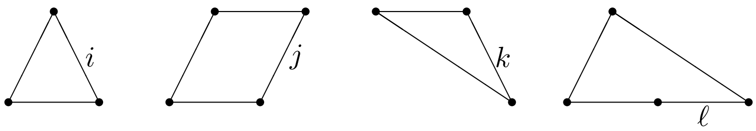


G の全域木 T

T に含まれない辺：$i,\ j,\ k,\ \ell$

$\downarrow$

T に関連した基本閉路系 $\mathcal{F}(T)$



5. 定理

- $\mathcal{F}(T)$ が $W(G)$ の基底になる。
- つまり G 内の閉路の形式和は全て、基本閉路を $\oplus$ した形に一意的に表せる。
- G のオーダー (頂点数)、サイズ (辺数) をそれぞれ n, m とすると

$$\dim W(G) = m - n + 1$$

6. 電気回路への応用

電気回路の各導線の電流を求めるには

- 各点について　　　電流の総和 $= 0$
- 各 基本閉路 について　　(抵抗値 $\times$ 電流) の総和 $=$ 電圧の総和

の式を立てて、連立一次方程式を解けばよい。(他の閉路についての電圧和の式は自動的に成り立つ。)