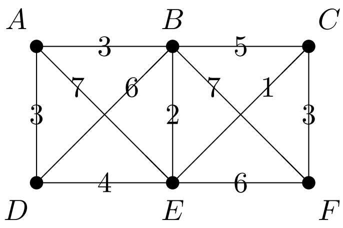
組合せとグラフの理論　(塩田)

— 最短路問題 : Dijkstra のアルゴリズム —

問　次の地図について、A から F への最短路を求めよ。



方針

- 出発点 A に最も近い点、2 番目に近い点、$\cdots$ を順に求めてゆく。
- 各点 v に「今まで見つかっている最短距離」 $t(v)$ （仮ラベル）と「本当の最短距離」 $\ell(v)$ （永久ラベル）を考える。
- 最短距離が確定した点の仮ラベルを永久ラベルに昇格させ、それをもとに未昇格点の仮ラベルを更新する、という作業を反復する。

アルゴリズム

1° 出発点 A には 仮ラベル $t(A)=0$, A 以外の全ての点 v には仮ラベル $t(v)=\infty$ をつける。

2° 出発点 A の仮ラベルを永久ラベルに昇格させる : $\ell(A)=0$.

3° 永久ラベルに昇格した点を x とする。
x に隣接して未昇格の全ての点 v に対して、$t(v)$ を

$$\min(t(v),\, \ell(x)+w(xv))$$

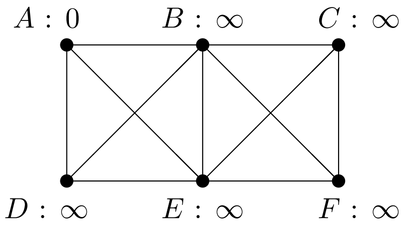
に更新する。(直前の点を覚えておく。)

4° 仮ラベルが最小の点を永久ラベルに昇格させる :

$$t(v) \to \ell(v)$$

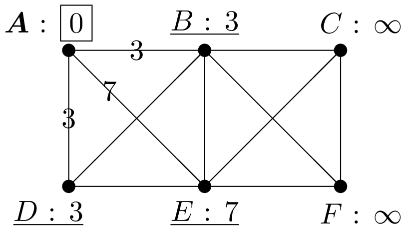
5° 目的地に永久ラベルが付くまで Step 3°– 4° を繰り返す。

実行例



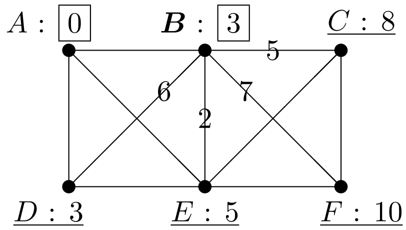
$t(A)=0$
$t(B)=\infty$
$t(C)=\infty$
$t(D)=\infty$
$t(E)=\infty$
$t(F)=\infty$

$\Rightarrow t(A)=0$ を $\ell(A)$ に昇格



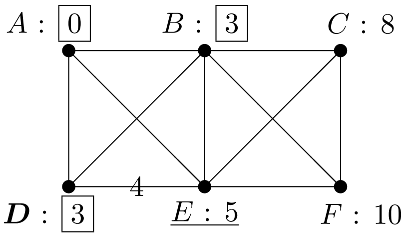
$t(B) = \min(\infty, 0+3) = 3$ (直前は A)
$t(C) = \infty$
$t(D) = \min(\infty, 0+3) = 3$ (直前は A)
$t(E) = \min(\infty, 0+7) = 7$ (直前は A)
$t(F) = \infty$

$\Rightarrow t(B) = 3$ を $\ell(B)$ に昇格



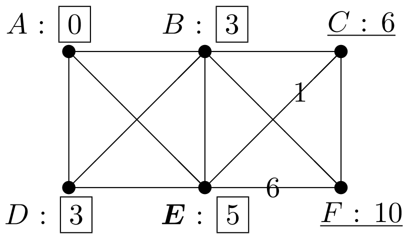
$t(C) = \min(\infty, 3+5) = 8$ (直前は B)
$t(D) = \min(3, 3+6) = 3$ (直前は A)
$t(E) = \min(7, 3+2) = 5$ (直前は B)
$t(F) = \min(\infty, 3+7) = 10$ (直前は B)

$\Rightarrow t(D) = 3$ を $\ell(D)$ に昇格



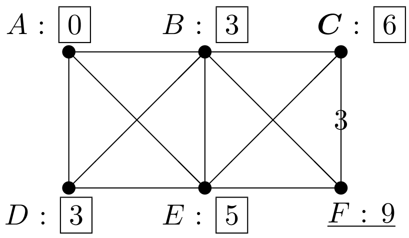
$t(C) = 8$ (直前は B)
$t(E) = \min(5, 3+4) = 5$ (直前は B)
$t(F) = 10$ (直前は B)

$\Rightarrow t(E) = 5$ を $\ell(E)$ に昇格



$t(C) = \min(8, 5+1) = 6$ (直前は E)
$t(F) = \min(10, 5+6) = 10$ (直前は B)

$\Rightarrow t(C) = 6$ を $\ell(C)$ に昇格



$t(F) = \min(10, 6+3) = 9$ (直前は C)

$\Rightarrow t(F) = 9$ を $\ell(F)$ に昇格

よって $A \to F$ の最短路は $A \to B \to E \to C \to F$.