

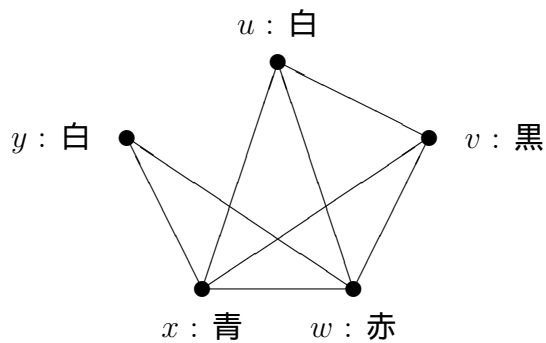
— グラフの彩色 —

1. スケジューリングと彩色問題の関係

問 次の表のように7人のメンバー  $A, B, \dots, G$  が5つの委員会  $u, v, \dots, y$  に所属しているとする。各委員にとって会議が重ならないように5つの委員会の時間帯を設定せよ。

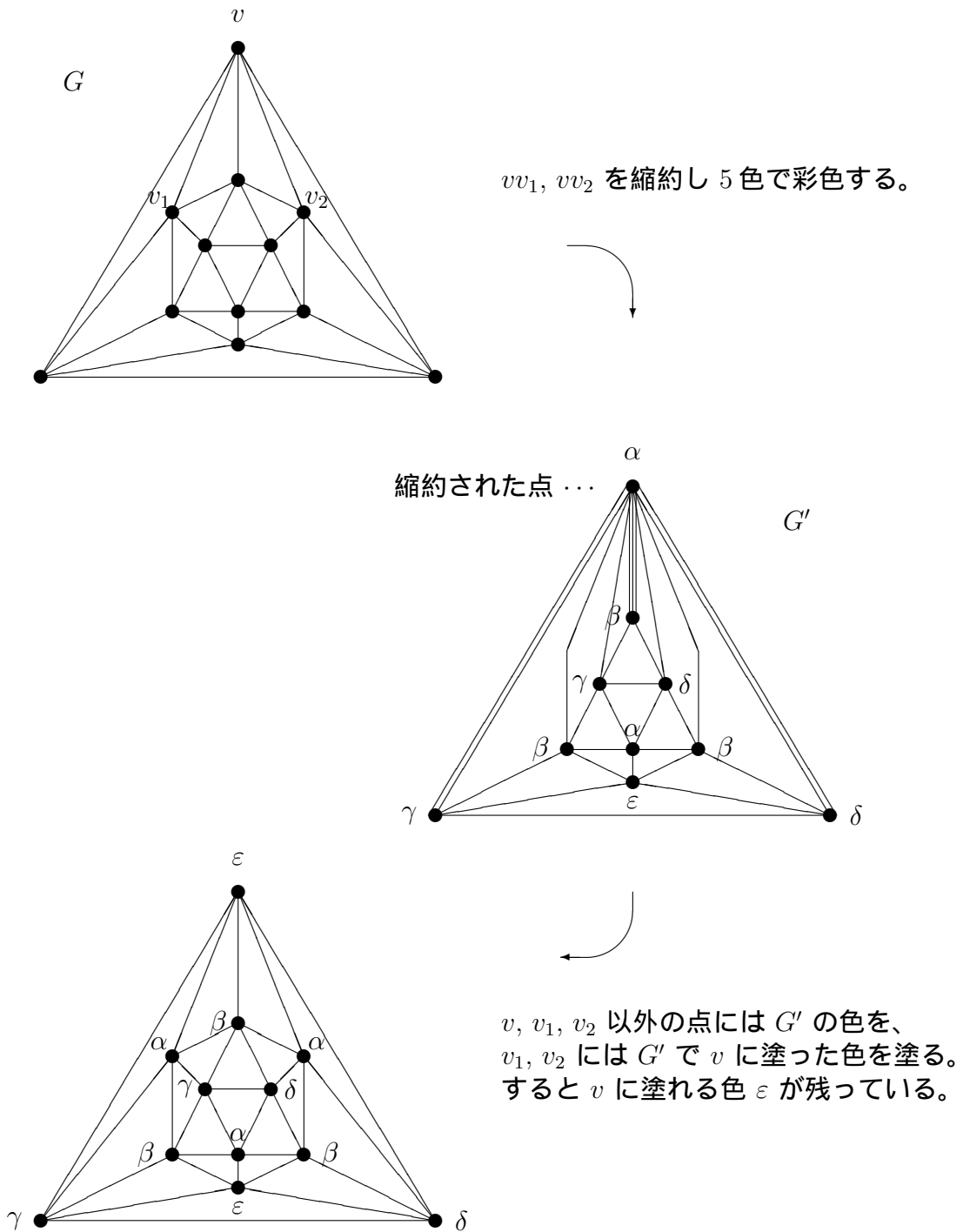
委員会	構成員
$u$	$A \quad D \quad E$
$v$	$A \quad B \quad E$
$w$	$A \quad C \quad D \quad F$
$x$	$B \quad D \quad G$
$y$	$C \quad F \quad G$

解 委員会を点とし、構成員を共有する委員会同志を辺で結んだグラフを描く。



このグラフの彩色数は4なので4コマで設定できる。

## 2. 定理 10 の証明の二十面体グラフの場合



### 3. 彩色数を求めるアルゴリズム

#### 彩色多項式

グラフ  $G$  を  $k$  色で点彩色する場合の数を  $P_G(k)$  と表すと、 $P_G(k)$  は  $k$  の多項式になる。これを「 $G$  の彩色多項式」と呼ぶ。

#### 定理

$G$  の勝手な辺  $e$  を取り、 $H = G - e$  ( 除去 )、 $K = G \setminus e$  ( 縮約 ) と置くと、 $P_G = P_H - P_K$  が成り立つ。

#### 彩色数を求めるアルゴリズム

Step 1. 上の定理を用いた再帰的プログラムで  $P_G(x)$  を計算する。

Step 2.  $P_G(x)$  の一次因子を  $x, x - 1, \dots$  の順に括り出してゆく。

Step 3. 始めて割り切れなくなった一次因子を  $x - m$  とすると、 $m$  が彩色数。

#### 例：ピーターズグラフの場合

Graph :

```
0 1 0 0 1 1 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0 1 0 0 0
0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
0 0 1 0 1 0 0 0 1 0
1 0 0 1 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 1 1 0
0 1 0 0 0 0 0 0 1 1
0 0 1 0 0 1 0 0 0 1
0 0 0 1 0 1 1 0 0 0
0 0 0 0 1 0 1 1 0 0
```

Chromatic Polynomial :

$$X^{10} - 15 X^9 + 105 X^8 - 455 X^7 + 1353 X^6 - 2861 X^5 + 4275 X^4 - 4305 X^3 + 2606 X^2 - 704 X$$

$$= (X) (X - 1) (X - 2) (X^7 - 12 X^6 + 67 X^5 - 230 X^4 + 529 X^3 - 814 X^2 + 775 X - 352)$$

Chromatic Number = 3