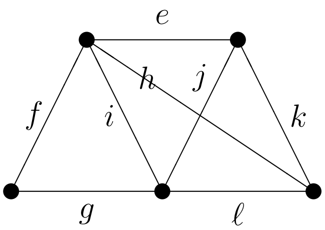
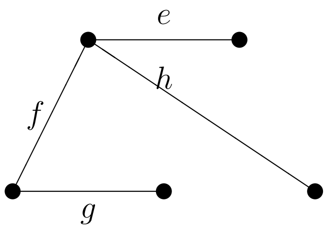
組合せとグラフの理論 （塩田） 2006.5.26

— 基本閉路系と閉路部分空間 —

1. 基本閉路系



G

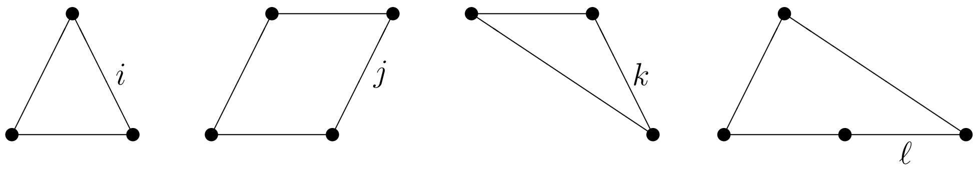


G の全域木 T

T に含まれない辺 : $i,\ j,\ k,\ \ell$

$\downarrow$

T に関連した基本閉路系 $\mathcal{F}(T)$

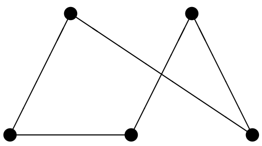
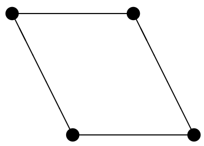


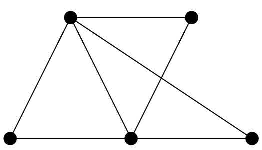
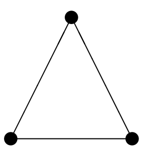
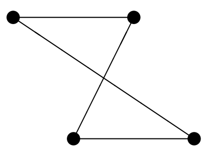
2. G の閉路部分空間 $W(G)$

- $W(G)$ のベクトルは閉路の形式和
- 加法は辺集合の XOR で定義する :

$$C \oplus D = (C \cup D) - (C \cap D)$$

例

$C =$  $D =$  のとき、

$C \oplus D =$  $=$  $\oplus$ 

3. 定理

- $W(G)$ は 2 元体 $\mathbf{F}_2$ 上のベクトル空間になる。
- $\emptyset$ (空集合) がゼロベクトル。
- $\mathcal{F}(T)$ が $W(G)$ の基底になる。
- G のオーダー (頂点数)、サイズ (辺数) をそれぞれ n, m とすると

$$\dim W(G) = m - n + 1$$

$*$ $\mathbf{F}_2 = \{0, 1\}$: 2 つしか数のない、一番シンプルな体

4. ベクトル空間のツボ

- 体 : 加減乗除の四則演算ができる数の集合 (数、と呼ぶに相応しいよね。)
- 体 F 上のベクトル空間 : **和**と、F の数による**スカラー倍**が定義されている集合
- この簡単な約束ごとから、
  - 次元 d が決まる。
  - F-成分の d-次元数ベクトルと同じ構造をもつことがわかる。
  - 行列計算で処理できる。

  ※ つまり扱いやすくて嬉しい。
- たとえば、$\mathbf{F}_2$ 上の d-次元ベクトル空間では 2^d 個ものベクトルがわずか d 個の基底ベクトルで統制できる。

5. 電気回路への応用

電気回路の各導線の電流を求めるには

- 各点で

$$\text{電流の総和} = 0$$

- 各 基本閉路 について

$$\text{電圧和} = (\text{抵抗値} \times \text{電流})\text{ の和}$$

の式を立てて、連立一次方程式を解けばよい。(他の閉路についての電圧和の式は自動的に成り立つ。)