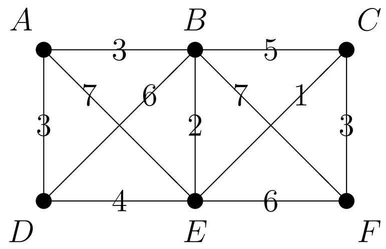
組合せとグラフの理論 （塩田） 2006.6.2

— 最短路問題：Dijkstra のアルゴリズム —

問 次の地図について、A から F への最短路を求めよ。



方針

- 出発点 A から点 v への最短距離 $\ell(v)$ を逐次求めてゆく。
- $\ell(v)$ を「永久ラベル」と呼び、その前に「仮ラベル」 $t(v)$ を用意する。仮ラベルの小さいものから永久ラベルに昇格させせて行くことによって、最短距離が求まる。

アルゴリズム

1° 出発点 A には 仮ラベル $t(A)=0$, A 以外の全ての点 v には仮ラベル $t(v)=\infty$ をつける。

2° 出発点 A の仮ラベルを永久ラベルに昇格させる：$\ell(A)=0.$

3° 永久ラベルに昇格した点を x とする。
x に隣接して未昇格の全ての点 v に対して、$t(v)$ を

$$\min(\ell(x)+w(xv),\, t(v))$$

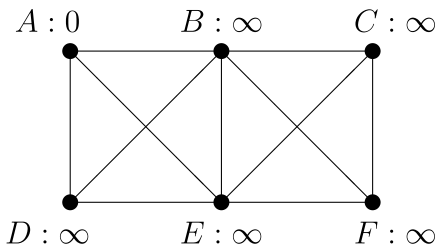
に更新する。（直前の点を覚えておく。）

4° 仮ラベルが最小の点を永久ラベルに昇格させる：

$$t(v)\to\ell(v)$$

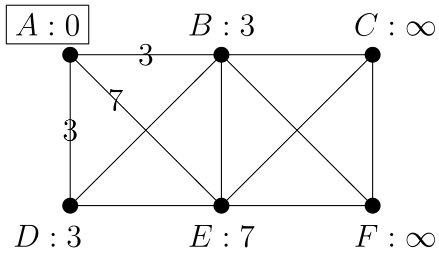
5° 目的地に永久ラベルが付くまで Step 3°– 4° を繰り返す。

実行例



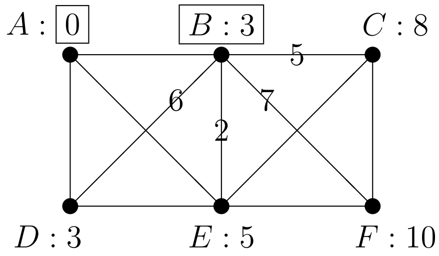
$t(A)=0$
$t(B)=\infty$
$t(C)=\infty$
$t(D)=\infty$
$t(E)=\infty$
$t(F)=\infty$

$\Rightarrow t(A)=0$ を $\ell(A)$ に昇格



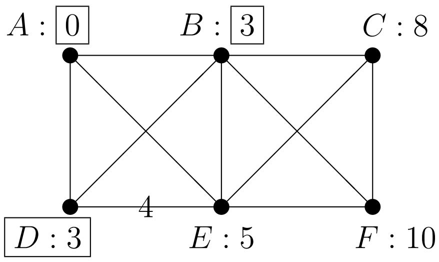
$t(B)=3$ (直前は A)
$t(C)=\infty$
$t(D)=3$ (直前は A)
$t(E)=7$ (直前は A)
$t(F)=\infty$

$\Rightarrow t(B)=3$ を $\ell(B)$ に昇格



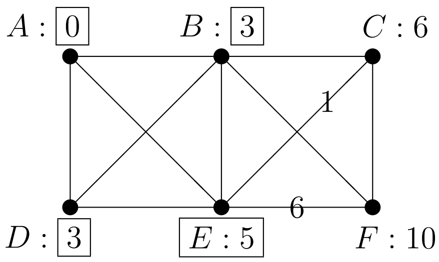
$t(C)=8=3+5$ (直前は B)
$t(D)=3=\min(3,3+6)$ (直前は A)
$t(E)=5=\min(7,3+2)$ (直前は B)
$t(F)=10=3+7$ (直前は B)

$\Rightarrow t(D)=3$ を $\ell(D)$ に昇格



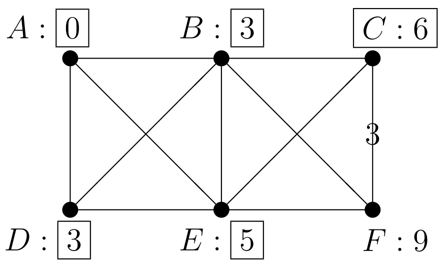
$t(C)=8$ (直前は B)
$t(E)=5=\min(5,3+4)$ (直前は B)
$t(F)=10$ (直前は B)

$\Rightarrow t(E)=5$ を $\ell(E)$ に昇格



$t(C)=6=\min(8,5+1)$ (直前は E)
$t(F)=10=\min(10,5+6)$ (直前は B)

$\Rightarrow t(C)=6$ を $\ell(C)$ に昇格



$t(F)=9=\min(10,6+3)$ (直前は C)

$\Rightarrow t(F)=9$ を $\ell(F)$ に昇格

よって $A\to F$ の最短路は $A\to B\to E\to C\to F$.