応用数学　（塩田）

— 畳み込み、離散フーリエ変換 —

1. 畳み込み

定義

2 つの関数 $f(x), g(x)$ の「畳み込み（合成積、convolution）」とは

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

によって定められる関数 $f * g$ のこと。

畳み込みは制御工学の基本的な道具で、

- 音響工学に於いては

$$(\text{エコー}) = (\text{音}) * (\text{インパルス応答})$$

1980 年代にインパルス応答の評価法が開発されてスピーカーの設計に応用されるようになった。カラオケのエコーもこの式を使って作られている。

- 信号処理においては

$$(\text{出力}) = (\text{入力}) * (\text{インパルス応答})$$

インパルス応答とは言わばパルス信号の出力で、システムの特性を表す。

- 画像処理においては

$$(\text{ぶれ}) = (\text{ピントの合った画像}) * (\text{絞りの特性})$$

- 確率論においては

$$(X+Y\ \text{の確率密度}) = (X\ \text{の確率密度}) * (Y\ \text{の確率密度})$$

- 多項式演算においては、$f(x) = \sum a_i x^i$ と $g(x) = \sum b_j x^j$ の積

$$f(x)g(x) = \sum c_n x^n$$

の係数の計算式

$$c_n = \sum_i a_i\, b_{n-i}$$

が離散的な畳み込みになる。

- 機械学習の分野では視覚情報の分析に畳み込みニューラルネットワークが用いられる。 etc.

2. 離散フーリエ変換

フーリエ変換は「連続パラメータを用いて、三角関数を、積分の形で足し合わせる」というもの。これに対し、

定義

mod N の離散的なパラメータを用いて三角関数を足し合わせた

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{x \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} f(x) e^{-2\pi i (x/N) t} \\ &= \sum_{x \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} f(x) \Big\{ \cos\left(2\pi \left(\frac{x}{N}\right) t\right) - i \sin\left(2\pi \left(\frac{x}{N}\right) t\right) \Big\} \end{aligned}$$

を「 $f(x)$ の離散フーリエ変換」と呼ぶ。($\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ は mod N の剰余類の集合。)

離散フーリエ変換についてもフーリエ変換と同様に反転公式

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{t \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} F(t) e^{2\pi i (t/N) x}$$

が成り立ち、次のような応用がある。

- 静止画像の圧縮技術である jpg は離散コサイン変換を用いている。主要な周波数成分以外をカットすることでデータ量を減らしており、どこまでカットするか、で画質・データ量をコントロールする。
- 信号処理では、信号を周波数成分に分解する「スペクトル解析」に用いられる。
- 次数の非常に高い多項式の乗算や、公開鍵暗号で用いるような長大な整数の乗算の高速化にも応用できる。(乗算に必要な畳み込みの計算が、離散フーリエ変換の世界では単なる掛け算になり、計算量のオーダーがさがる、という仕組み。)

3. 高速フーリエ変換

N が 2 べきのときには離散フーリエ変換を高速に実装できるアルゴリズムがあり、これを「高速フーリエ変換 (FFT) 」と呼ぶ。(正確には「高速離散フーリエ変換」と呼ぶべきだが、「離散」は入れないのが慣習。)

... 研究室によっては卒業研究のゼミで勉強することもあろうかと思います。