

応用数学 (塩田)

— ルジャンドル多項式 —

級数解法により、ルジャンドルの微分方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + N(N+1)y = 0$$

の一般解は

$$y = c_0 f + c_1 g \quad (c_0, c_1 \text{ は任意定数}),$$

$$f = 1 - \frac{N(N+1)}{2!}x^2 + \frac{(N-2)N(N+1)(N+3)}{4!}x^4 + \dots,$$

$$g = x - \frac{(N-1)(N+2)}{3!}x^3 + \frac{(N-3)(N-1)(N+2)(N+4)}{5!}x^5 + \dots$$

と書けることがわかる。ここで

$$\begin{cases} N \text{ が偶数} & \Rightarrow f \text{ は } N \text{ 次式, } g \text{ は無限級数} \\ N \text{ が奇数} & \Rightarrow g \text{ は } N \text{ 次式, } f \text{ は無限級数} \end{cases}$$

であるので、この N 次式を定数倍して (x^N の係数) $= \frac{(2N)!}{2^N (N!)^2}$ としたものを「ルジャンドル多項式 $P_N(x)$ 」と呼ぶ。

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2}, \quad P_3(x) = \frac{-3x}{2} + \frac{5x^3}{2},$$

$$P_4(x) = \frac{3}{8} - \frac{15x^2}{4} + \frac{35x^4}{8}, \quad P_5(x) = \frac{15x}{8} - \frac{35x^3}{4} + \frac{63x^5}{8},$$

$$P_6(x) = -\frac{5}{16} + \frac{105x^2}{16} - \frac{315x^4}{16} + \frac{231x^6}{16},$$

$$P_7(x) = \frac{-35x}{16} + \frac{315x^3}{16} - \frac{693x^5}{16} + \frac{429x^7}{16},$$

$$P_8(x) = \frac{35}{128} - \frac{315x^2}{32} + \frac{3465x^4}{64} - \frac{3003x^6}{32} + \frac{6435x^8}{128},$$

$$P_9(x) = \frac{315x}{128} - \frac{1155x^3}{32} + \frac{9009x^5}{64} - \frac{6435x^7}{32} + \frac{12155x^9}{128},$$

$$P_{10}(x) = -\frac{63}{256} + \frac{3465x^2}{256} - \frac{15015x^4}{128} + \frac{45045x^6}{128} - \frac{109395x^8}{256} + \frac{46189x^{10}}{256} \quad \text{etc.}$$

これらは関数の内積 $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ に関して直交する「直交関数系」であり、その直交性を活かして「ガウスの積分公式」などに応用される。

x	P0(x)	P1(x)	P2(x)	P3(x)	P4(x)	P5(x)
-1	1	-1	1	-1	1	-1
-0.95	1	-0.95	0.85375	-0.7184	0.55409	-0.3727
-0.9	1	-0.9	0.715	-0.4725	0.20794	0.04114
-0.85	1	-0.85	0.58375	-0.2603	-0.0506	0.28566
-0.8	1	-0.8	0.46	-0.08	-0.233	0.39952
-0.75	1	-0.75	0.34375	0.07031	-0.3501	0.41638
-0.7	1	-0.7	0.235	0.1925	-0.4121	0.3652
-0.65	1	-0.65	0.13375	0.28844	-0.4284	0.27049
-0.6	1	-0.6	0.04	0.36	-0.408	0.15264
-0.55	1	-0.55	-0.0462	0.40906	-0.359	0.02819
-0.5	1	-0.5	-0.125	0.4375	-0.2891	-0.0898
-0.45	1	-0.45	-0.1963	0.44719	-0.205	-0.1917
-0.4	1	-0.4	-0.26	0.44	-0.113	-0.2706
-0.35	1	-0.35	-0.3163	0.41781	-0.0187	-0.3225
-0.3	1	-0.3	-0.365	0.3825	0.07294	-0.3454
-0.25	1	-0.25	-0.4063	0.33594	0.15771	-0.3397
-0.2	1	-0.2	-0.44	0.28	0.232	-0.3075
-0.15	1	-0.15	-0.4663	0.21656	0.29284	-0.2523
-0.1	1	-0.1	-0.485	0.1475	0.33794	-0.1788
-0.05	1	-0.05	-0.4963	0.07469	0.36565	-0.0927
0	1	0	-0.5	0	0.375	0
0.05	1	0.05	-0.4963	-0.0747	0.36565	0.09266
0.1	1	0.1	-0.485	-0.1475	0.33794	0.17883
0.15	1	0.15	-0.4663	-0.2166	0.29284	0.25232
0.2	1	0.2	-0.44	-0.28	0.232	0.30752
0.25	1	0.25	-0.4063	-0.3359	0.15771	0.33972
0.3	1	0.3	-0.365	-0.3825	0.07294	0.34539
0.35	1	0.35	-0.3163	-0.4178	-0.0187	0.32245
0.4	1	0.4	-0.26	-0.44	-0.113	0.27064
0.45	1	0.45	-0.1963	-0.4472	-0.205	0.19172
0.5	1	0.5	-0.125	-0.4375	-0.2891	0.08984
0.55	1	0.55	-0.0462	-0.4091	-0.359	-0.0282
0.6	1	0.6	0.04	-0.36	-0.408	-0.1526
0.65	1	0.65	0.13375	-0.2884	-0.4284	-0.2705
0.7	1	0.7	0.235	-0.1925	-0.4121	-0.3652
0.75	1	0.75	0.34375	-0.0703	-0.3501	-0.4164
0.8	1	0.8	0.46	0.08	-0.233	-0.3995
0.85	1	0.85	0.58375	0.26031	-0.0506	-0.2857
0.9	1	0.9	0.715	0.4725	0.20794	-0.0411
0.95	1	0.95	0.85375	0.71844	0.55409	0.37274
1	1	1	1	1	1	1

ルジャンドル多項式

