応用数学　（塩田）

— 熱伝導方程式、波動方程式の例 —

熱伝導方程式

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \text{境界条件} & u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \\ \text{初期条件} & u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

の解は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi c}{\ell}\right)^2 t\right)$$

と書ける。係数 C_n は $f(x)$ のフーリエ正弦展開の係数として得られ、

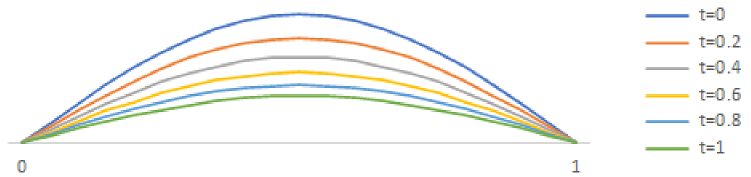
$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

<u>例 1</u>　$\ell = 1,\ f(x) = \sin(\pi x)$ のとき

$C_1 = 1$, 他の $C_n = 0$ の場合で

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \exp\left(-(\pi c)^2 t\right)$$

横軸を x, 縦軸を温度とすると、時刻 t での温度 $u(x,t)$ は図のように変化する。

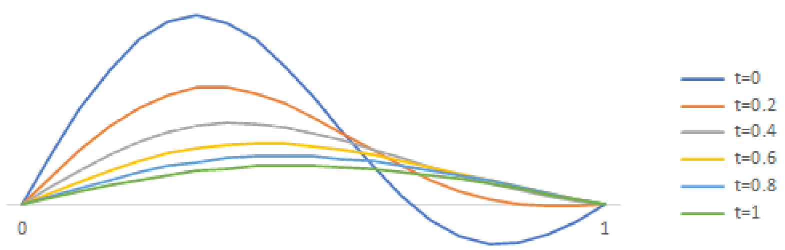


だんだん冷めてゆくゆくが、時間がたつほど冷め方がゆっくりになる様子が見て取れる。

<u>例 2</u>　$\ell = 1,\ f(x) = \sin(\pi x) + \sin(2\pi x)$ のとき

$C_1 = C_2 = 1$, 他の $C_n = 0$ の場合で

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \exp\left(-(\pi c)^2 t\right) + \sin(2\pi x) \exp\left(-(2\pi c)^2 t\right)$$



右側の冷たかったところに左側の熱が伝わって、やがてどちらも冷めてゆく。

波動方程式

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} \text{境界条件} \quad u(0,t) = u(\ell, t) = 0 \\ \text{初期条件} \quad u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$$

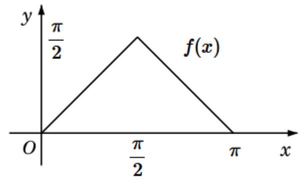
の解は

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left\{ C_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{\ell}\right) \right\}$$

と書け、係数 C_n, D_n は

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx, \quad D_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx.$$

<u>例</u> $\ell = \pi, \quad f(x) = \begin{cases} x & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \pi - x & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}$, $g(x) = 0$ のとき



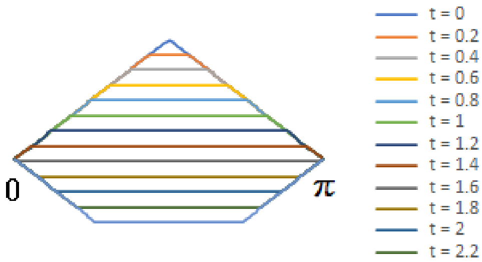
教科書 pp.101-102, 例 3.2 より

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) - \frac{1}{3^2} \sin(3x) + \frac{1}{5^2} \sin(5x) - \cdots \right)$$

ゆえ、C_n はそのフーリエ正弦展開の係数を読み取ればよく

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x)\cos(ct) - \frac{1}{3^2} \sin(3x)\cos(3ct) + \frac{1}{5^2} \sin(5x)\cos(5ct) - \cdots \right)$$

横軸を x, 縦軸を振幅としてシミュレーションしてみると



三角形の形に弦を引っ張って離すと、台形の形になって低くなってゆき、反対側にまた台形の形で膨らんでゆくことがわかる。

「ストークスの波動公式」を用いた解は

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \Big\{ f(x - ct) + f(x + ct) \Big\}$$

となり、時刻 t での波形は、初期の三角形の波形を左右に ct だけシフトした波形の平均で台形になり、上のシミュレーションの通りとなる。